Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Feixes de Supercaracteres

João Miguel Cardoso Dias

Dissertação
Mestrado em Matemática

2014

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Feixes de Supercaracteres

João Miguel Cardoso Dias

Dissertação
Mestrado em Matemática

Orientador: Professor Carlos Alberto Martins André

2014

Resumo

Nesta dissertação pretende-se unir duas ferramentas usadas no estudo de caracteres de grupos finitos, a teoria de supercaracteres que foi inicialmente formalizada por P. Diaconis e M.Isaacs, com a teoria de feixes de caracteres, introduzida por G. Lusztig. A ideia de feixes de caracteres é essencialmente motivada pelos trabalhos de P. Deligne nos SGA, nomeadamente pelo facto de as representações do grupo fundamental de um grupo algébrico estarem em bijecção com os sistema locais no grupo algébrico.

A organização desta dissertação é a seguinte, o primeiro capítulo é uma pequena introdução à teoria de supercaracteres e constroi-se uma teoria de supercaracteres para um grupo álgebra finito. No capítulo dois é feito um resumo sobre os conceitos elementares usados no resto da dissertação. No capítulo três é feito um resumo da teoria de grupos algébricos, constroi-se um grupo algébrico a partir de um grupo álgebra, e faz-se um breve resumo sobre o morfismo de Frobenius. No capítulo cinco introduz-se a teoria de feixes de caracteres, e a sua motivação, no fim é feita a construção de feixes de caracteres para grupos abelianos, algo que será fundamental para a contrução dos feixes de supercaracteres. No último capítulo é feita a construção dos feixes de supercaracteres análoga à construção de supercaracteres para grupos álgebra, e no fim são expostas umas questões deixadas em aberto.

Palavras-chaves: grupos finitos, feixes l-ádicos, grupos algébricos, teoria de supercaracteres, grupos álgebra, feixes de caracteres.

Abstract

The purpose of this thesis is to unite two tools used in the study of the characters of finite groups, the theory of supercharacters which initially was developed by P. Diaconis and M.Isaacs, with the theory of character sheaves, introduced by G. Lusztig. The idea behind character sheaves is essentially motivated by the works of P. Delign in the SGA, namely by the fact of the representations of the fundamental group of an algebraic group are in bijection with the local systems in the algebraic group.

The organization of this thesis is the following: the first chapter is a small introduction to the theory of supercaracteres and is made a theory of supercaracteres of finite group algebra. In the second chapter is made a brief summary of the elementary concepts used in the thesis. In chapter three is made a summary of the theory if algebraic groups, it's defined an algebraic group associated to a finite groups algebra, and in the end of the chapter is introduced the Frobenius morphism. In chapter five is introduced the theory of character sheaves, and its motivation, in the end of the chapter it's made the construction of character sheaves for an abelian algebraic group, which will be fundamental for the construction of the supercharacter sheaves. In the last chapter it's made the construction of the supercharacter sheaves analogously to the construction of supercharacters, in the end are exposed some questions about the supercharacter sheaves left unsolved.

Keywords: finite groups, l-adic, algebraic groups, theory supercharacter, algebra groups, characteres sheaves.

Agradecimentos

Gostava de deixar aqui o agradecimento ao professor Carlos André por me ter introduzido ao tema desenvolvido na dissertação, e por toda a ajuda que me prestou.

Agradeço tambem ao Jocelyn e ao Pedro pela ajuda que me prestaram, quero agradecer ao Joaquim. E por último agradeço tambem à minha familia e amigos em especial à Carolina pela companhia que me fez e me ouvir falar desta dissertação.

Conteúdo

Introdução

A teoria de caracteres (complexos) do grupo unitriangular sobre um corpo finito é conhecida por ser um problema bastante difícil. Carlos André (1992) [**?**] e Ning Yan (2001) desenvolveram uma teoria de supercaracteres (Carlos André chamou-lhes caracteres básicos e Ning Yan chamou-lhes caracteres de transição), que mais tarde foi generalizada para grupos-álgebra por Persi Diaconis e Martin Isaacs [**?**]. A teoria de supercaracteres pode ser encarada como um generalização da teoria de caracteres, onde substituímos os caracteres irredutíveis por supercaracteres (que são combinações lineares de alguns caracteres irredutíveis) e classes de conjugação por superclasses, na medida em que os supercaracteres são constantes nas superclasses.

Numa outra abordagem à teoria de caracteres, uma abordagem geométrica, consideramos um grupo algébrico sobre um corpo algebricamente fechado de característica prima, e recuperamos os grupos finitos através dos morfismos de Frobenius. Por exemplo o grupo algébrico correspondente ao grupo unitriangular sobre um corpo com q elementos contém todos os grupos unitriangulares sobre um corpo com q^n elementos. A ideia-base vem de considerar o corpo finito $\mathbb{F}_q$ como o conjunto dos pontos fixos no fecho algébrico de $\mathbb{F}_q$ pelo morfismo de Frobenius.

Deste modo, podemos estudar vários grupos finitos simultaneamente, estudando o grupo algébrico correspondente, e a forma de estudarmos os caracteres dos vários grupos simultaneamente é feita considerando feixes definidos no grupo algébrico (que encaramos como um esquema-grupo), mais concretamente complexos de feixes ℓ-ádicos, e usando a conhecida correspondência feixes-funções, ou seja, a cada feixe associamos uma certa função, com valores em $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$, que é determinada pelo morfismo de Frobenius e que é compatível com as operações fundamentais entre feixes (*pullback*, *pushforward* e produto tensorial).

Os caracteres do grupo linear completo sobre $\mathbb{F}_q$ que foram descritos por James Green [**?**]. Mais tarde, George Lusztig provou a existência de uma colecção de feixes no grupo algébrico associado ao grupo linear completo tal que a correspondência feixes-funções define uma correspondência bijectiva entre as classes de isomorfismo dos feixes e os caracteres irredutíveis do grupo linear completo. A essa colecção de feixes chamamos feixes de caracteres. George Lusztig provou tambem que essa bijecção tambem é possivel no caso de um grupo abeliano [?], facto que será fundamental para esta dissertação.

Além disso, George Lusztig provou que fazer o mesmo é impossivel para muitos grupos algébricos redutivos conexos e para uma classe de grupos unipotentes conexos. No entanto, para grupos redutivos conexos, George Lusztig provou que existe uma colecção de feixes tal que as funções-traço formam uma base para o espaço das funções de classe de $G(\mathbb{F}_{q^n})$ e conjectura que o mesmo é verdade para os grupos unipotentes conexos. Vladimir Drinfeld e Mitya Boyarchenko provam que para grupos unipontentes sobre $\mathbb{F}_q$, em que a classe de nilpotência é menor que a característica de $\mathbb{F}_q$, é possivel definir uma colecção de feixes tal que a correspondência feixes-funções define uma correspondência bijectiva entre as classes de isomorfismo dos feixes e os caracteres irredutíveis [?]. A contrução desses feixes é análoga à construção dos caracteres irredutíveis pelo método das órbitas de Kirillov.

O objectivo desta dissertação é de fazer um processo análogo à construção de supercaracteres para um grupo-álgebra, começando por definir o esquema associado a um dado grupo-álgebra, ou seja, dar uma estrutura de esquema à álgebra e outra ao grupo associado de forma compatível. Introduzimos o conceito de indução de feixes de caracteres, que é compatível com a correspondência feixes-funções, de modo a poder definir o que iremos chamar de feixes de supercaracteres. Uma das formas de se construir os supercaracteres para um grupo algebra $G = 1 + A$ é considerar uma acção no conjunto dos caracteres irredutíveis do grupo abeliano $(A, +)$ e, dado um carácter irredutível do grupo abeliano, restringi-lo ao seu estabilizador, passar para o grupo correspondente e induzi-lo para o grupo G. A construção dos feixes de supercaracteres é analoga, na medida em que consideramos uma acção nos feixes de caracteres de A, restringimo-lo ao feixe análogo definido no estabilizador e usamos a indução de feixes para passar ao grupo. A correspondência feixes-funções, quando aplicada a este feixe, dá-nos um supercarácter e, nesta dissertação, provamos também que qualquer supercarácter é obtido por este processo.

Temos, assim, uma correspondência sobrejectiva dos feixes de supercaracteres para os supercaracteres e conjecturamos que esta correspondência é bijectiva. Caso seja bijectiva, será possivel decompôr os feixes de supercaracteres no grupo unitriangular como um produto tensorial de feixes de supercaracteres (cuja correspondência feixes-funções dá um caracter irredutível).

Esta nova abordagem à teoria de supercaracteres, por envolver mais estruturas, além de permitir interpretar os resultados conhecidos de um perspectiva geométrica, pode permitir obter novos resultados.

Capítulo 1

Supercaracteres de grupos-álgebra

1.1 Teorias de supercaracteres

Por uma *teoria de supercaracteres* para um grupo finito G entendemos um par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, onde $\mathcal{X}$ é uma partição de G e $\mathcal{Y}$ é um conjunto de caracteres de G, ortogonais dois-a-dois (com respeito ao produto escalar de Frobenius), tal que:

- $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}|$;
- qualquer caracter $\chi \in \mathcal{Y}$ é constante em cada elemento de $\mathcal{X}$;
- todo o caracter irredutível de G é constituinte de um (e um só) caracter $\chi \in \mathcal{Y}$.

Aos elementos $K \in \mathcal{X}$ chamamos *superclasses* e aos elementos $\chi \in \mathcal{Y}$ chamamos *supercaracteres* (com respeito à teoria $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Podemos substituir o terceiro axioma pelo seguinte:

- $\{1\}$ é uma superclasse e o caracter trivial 1_G é um supercaracter.

Dado um grupo finito G (não-trivial), existem sempre duas teorias de supercaracteres triviais:

- Tomando para conjunto de supercaracteres, o conjunto dos caracteres irredutíveis $\mathrm{Irr}(G)$ de G e, para conjunto de superclasses, as classes de conjugação de G. Neste caso, a teoria de supercaracteres coincide com a teoria de caracteres usual.

- Tomando para conjunto de supercaracteres, o conjunto

  $$\mathcal{Y} = \{1_G, \rho_G - 1_G\},$$

  onde ρ_G é o caracter regular, e, para conjunto de superclasses, o conjunto

  $$\mathcal{X} = \{\{1\}, G\backslash\{1\}\}.$$

Estas duas teorias de supercaracteres são os dois casos extremos em termos do número de superclasses (e, logo, de supercaracteres).

Uma teoria de supercaracteres não-trivial pode ser construída da forma seguinte. Consideremos um grupo A que actua sobre um grupo finito G. Podemos estender essa acção às classes de conjugação pondo

$$a \cdot C = \{ag \mid g \in C\}, \quad a \in A,\ C \text{ classe de conjugação de } G.$$

Definimos as superclasses de G por

$$\mathcal{X} = \{\cup_{a\in A} aC \mid C \text{ classe de conjugação de } G\}.$$

Por outro lado, definimos uma acção de A no conjunto dos caracteres irredutíveis de G por

$$(a \cdot \chi)(g) = \chi(a^{-1}g), \quad a \in A,\ \chi \in \mathrm{Irr}(G),\ g \in G.$$

Para cada A-órbita $\Omega \subset \mathrm{Irr}(G)$ definimos o caracter χ_Ω de G como sendo a soma

$$\chi_\Omega = \sum_{\chi\in\Omega} \chi(1)\chi.$$

Tomamos estes caracteres como supercaracteres. Obtemos, assim, uma teoria de supercaracteres que, em geral, não é nenhuma das duas triviais (como definimos acima).

1.2 Grupos-álgebra

Nesta dissertação, iremos trabalhar com uma classe de grupos particulares: os grupos-álgebra.

Definição. Dado um corpo $\Bbbk$, seja A uma $\Bbbk$-álgebra (associativa) nilpotente, ou seja, tal que existe um natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$. (Em particular,

A não tem identidade.) À $\Bbbk$-álgebra A, associamos o conjunto de objectos formais

$$G = 1 + A = \{1 + a \mid a \in A\},$$

equipado com a estrutura natural de grupo para a multiplicação dada por

$$(1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab, \quad a, b \in A.$$

(Essencialmente, G tem o mesmo conjunto-suporte que A.) A um grupo deste tipo chamamos um *grupo-álgebra* sobre $\Bbbk$.

Na realidade, um grupo-álgebra G é um subgrupo do grupo das unidades da $\Bbbk$-álgebra $\Bbbk \cdot 1 + A$ (da qual A é o radical de Jacobson).

Um exemplo típico de grupo-álgebra é o caso do grupo unitriangular $U_n(\Bbbk)$ que consiste nas matrizes quadradas de tamanho n com entradas em $\Bbbk$ tendo 1's na diagonal e 0's abaixo da diagonal. Este grupo está associado à $\Bbbk$-álgebra $\mathfrak{u}_n(\Bbbk)$ das matrizes triangulares estritamente superiores.

Mais geralmente, podemos definir grupo-álgebra sobre um anel comutativo com identidade. Além disso, dadas $\Bbbk$-álgebras A e R, em que A é como acima e R é comutativa e com identidade, podemos "estender os escalares" e considerar a R-álgebra $A(R) = A \otimes_{\Bbbk} R$ que está associada ao grupo-álgebra $G(R) = 1 + (A \otimes_{\Bbbk} R)$. Em particular, dado uma extensão $\Bbbk'$ do corpo $\Bbbk$, podemos considerar o grupo-ágebra $G(\Bbbk') = 1 + (A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk')$ que está associado à $\Bbbk'$-álgebra $A(\Bbbk') = A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk'$. Nesta dissertação, estamos interessados no caso em que $\Bbbk$ é um corpo finito $\mathbb{F}_q$ com q elementos, onde q é potência de um número primo p, e $\Bbbk'$ é uma extensão finita $\mathbb{F}_{q^n}$ de $\mathbb{F}_q$.

1.3 Superclasses

Seja $G = 1 + A$ um grupo-álgebra sobre $\mathbb{F}_q$ em que A é uma $\Bbbk$-álgebra nilpotente de dimensão finita.

Para definirmos uma teoria de supercaracteres em G, começamos por considerar a acção à esquerda (resp., à direita) do grupo G sobre a $\mathbb{F}_q$-álgebra A multiplicando à esquerda (resp., à direita) os elementos de A pelos elementos de G. Estas acções são dadas pelas correspondências

$$(g, a) \mapsto ga \quad \text{e} \quad (a, g) \mapsto ag.$$

Consideramos também os estabilizadores em G de um elementos $a \in A$ para cada uma destas acções:

$$L_a = \{g \in G \mid ga = a\} \quad \text{e} \quad R_a = \{g \in G \mid ag = a\}.$$

Estes subgrupos são (sub)grupos-álgebras e estão associados, respectivamente, ás subálgebras

$$\mathcal{L}_a = \{b \in A \mid ba = 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_a = \{b \in A \mid ab = 0\}$$

de A. Assim, temos $|L_a| = |\mathcal{L}_a|$ e $|R_a| = |\mathcal{R}_a|$. Pelo teorema órbita-estabilizador, temos

$$|Ga| = |G|/|L_a| \quad \text{e} \quad |aG| = |G|/|R_a|$$

e, portanto, a cardinalidade de cada órbitas esquerdas ou direitas é uma potência de q.

Com nestas duas acções, iremos definir uma partição do grupo G naquilo que a que chamaremos as superclasses. Como a acção direita é compatível com a acção esquerda (ou seja, temos $(ga)h = g(ah)$ para $g, h \in G$ e $a \in A$), podemos definir uma acção à esquerda do grupo $G \times G$ na $\mathbb{F}_q$-álgebra A por

$$(g, h) \cdot a = gah^{-1}, \quad g, h \in G, \ a \in A.$$

Deste modo, podemos particionar a $\mathbb{F}_q$-álgebra A nas órbitas bilaterais GaG, para $a \in A$, e obter a partição no grupo G em subconjuntos da forma

$$K_a = 1 + GaG, \quad a \in A.$$

Chamamos *superclasses* de G a estes subconjuntos.

Lema 1.3.1. *Para qualquer $a \in A$, temos*

$$|GaG| = \frac{|Ga|\,|aG|}{|Ga \cap aG|}.$$

Em particular, a cardinalidade de cada superclasse de G é uma potência de q.

Demonstração. Para qualquer $a \in A$, definimos a aplicação $\phi\colon Ga \times aG \to GaG$ por

$$\phi(ga, ah) = gah, \quad g, h \in G.$$

Temos que ϕ está bem definida e que todas as suas fibras têm a mesma cardinalidade

$$|\phi^{-1}(a)| = |Ga \cap aG|.$$

Como ϕ é sobrejectiva, obtemos

$$|GaG||Ga \cap aG| = |Ga||aG|$$

Como $Ga = a + Aa$, $aG = a + aA$ e $Ga \cap aG = a + (Aa \cap aA)$, vemos que $|Ga$, $|aG|$ e $|Ga \cap aG|$ são potências de q (pois Aa, aA e $Aa \cap aA$ são espaços vectoriais sobre $\mathbb{F}_q$, logo a sua cardinalidade é uma potência de q). O resultado segue-se. □

1.4 Órbitas no grupo dual A°

Iremos agora definir os supercaracteres no grupo álgebra $G = 1 + A$ onde A é como na secção anterior. Começamos por considerar os caracteres irredutíveis do grupo aditivo $(A, +)$ da $\mathbb{F}_q$-álgebra. Definimos acções no *grupo dual* de $(A, +)$, que denotamos por A° e que é constituído por todos os caracteres irredutíveis de $(A, +)$. Dados $\nu \in A^\circ$ e $g \in G$, definimos $g\nu, \nu g \in A^\circ$ por

$$(g\nu)(a) = \nu(g^{-1}a) \quad \text{e} \quad (\nu g)(a) = \nu(ag^{-1}), \quad a \in A.$$

Temos novamente duas acções compatíveis, pelo que podemos definir uma acção do grupo $G \times G$ em A° da maneira natural por

$$(g, h) \cdot \nu = g\nu h^{-1}, \quad g, h \in G, \ \nu \in A^\circ.$$

Lema 1.4.1. *Seja $G = 1 + A$ um grupo-álgebra sobre $\mathbb{F}_q$. Então, o número de órbitas esquerdas (resp., órbitas direitas e órbitas bilaterais) de G em A é igual ao número de órbitas esquerdas (resp., órbitas direitas e órbitas bilaterais) de G em A°.*

Demonstração. Como $(A, +)$ é um grupo abeliano, as classes de conjugação são conjuntos singulares. Como $(g\nu)(ga) = \nu(a)$ para todos $g \in G$, $\nu \in A^\circ$ e $a \in A$, o teorema de Brauer assegura que, para qualquer $g \in G$, o número de elementos fixos por g em A é igual ao número de elementos fixos por g em A°. Logo, o resultado segue-se pela fórmula de contagem de órbitas. □

A demonstração do lema seguinte é anàloga ao caso de órbitas de G em A.

Lema 1.4.2. *Seja $G = 1 + A$ um grupo-álgebra sobre $\mathbb{F}_q$. Então,*

$$|G\nu G| = \frac{|G\nu|\,|\nu G|}{|G\nu \cap \nu G|}$$

para todo $\nu \in A^\circ$.

Analogamente às acções de G em A, consideramos os estabilizadores (direito e esquerdo, respectivamente) em G

$$L_\nu = \{g \in G \mid g\nu = \nu\} \quad \text{e} \quad R_\nu = \{g \in G \mid \nu g = \nu\}$$

de qualquer $\nu \in A^\circ$. Estes subgrupos de G são grupos-álgebra e estão associados, respectivamente, às subálgebras

$$\mathcal{L}_\nu = \{a \in A \mid aA \subseteq \mathrm{Ker}(\nu)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_\nu = \{a \in A \mid Aa \subseteq \mathrm{Ker}(\nu)\}$$

de A. Como no caso de acções na álgebra A, a cardinalidade de qualquer órbita à direita, ou à esquerda, é potência de q e, portanto, a cardinalidade de qualquer órbita bilateral também é uma potência de q.

1.5 Supercaracteres

Resumindo, definimos as superclasses do grupo-álgebra $G = 1 + A$ como as órbitas bilaterais de G na $\mathbb{F}_q$-álgebra A e, pela secção anterior, temos também uma partição do grupo dual A° em órbitas bilaterais. Vimos que o número de superclasses é igual ao número de órbitas bilaterais em A°. Por esta razão, iremos procurar um conjunto de "supercaracteres" que estejam em bijecção com o número de órbitas bilaterais em A°.

Começamos por simplificar a notação. Considere-se a aplicação (bijectiva) $\pi\colon G \to A$ definida por

$$\pi(g) = g - 1, \quad g \in G,$$

e defina-se uma acção à esquerda de G sobre A por

$$g \cdot a = ga + \pi(g), \quad g \in G,\ a \in A.$$

Podemos estender esta acção linearmente à álgebra de grupo $\mathbb{C}[A]$ de forma a torná-la um $\mathbb{C}[G]$-módulo à esquerda. Além disso, a aplicação π pode ser estendido linearmente a um isomorfismo de $\mathbb{C}[G]$-módulos esquerdos

$$\pi\colon \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[A]$$

em que $\mathbb{C}[G]$ é considerado como o $\mathbb{C}[G]$-módulo regular à esquerda. Daqui, resulta o seguinte:

Lema 1.5.1. *Se $G = 1 + A$ for um grupo-álgebra sobre $\mathbb{F}_q$, então o $\mathbb{C}[G]$-módulo $\mathbb{C}[A]$, com a acção definida acima, produz o caracter regular ρ_G de G.*

É conhecido que, como espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}[A]$ tem uma base

$$\{\varepsilon_\nu \mid \nu \in A^\circ\}$$

formada pelos idempotentes centrais primitivos

$$\varepsilon_\nu = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \overline{\nu(a)}a, \qquad \nu \in A^\circ.$$

Para qualquer $\nu \in A^\circ$, temos

$$g \cdot \varepsilon_\nu = \overline{\nu(\pi(g^{-1}))}\varepsilon_{g\nu}, \quad g \in G.$$

Assim, a órbita à esquerda $G\nu \in A^\circ$ gera o $\mathbb{C}[G]$-submódulo

$$\mathfrak{L}_\nu = \mathbb{C}[G]\varepsilon_\nu.$$

Denotamos por χ_ν o caracter produzido por este módulo e chamamos-lhe o *supercaracter* de G associado a $\nu \in A^\circ$. Notemos que, como $\{\varepsilon_\tau \mid \tau \in G\nu\}$ é base de $\mathfrak{L}_\nu$, temos que

$$\chi_\nu(1) = \dim \mathfrak{L}_\nu = |G\nu|.$$

Outra forma de obter os supercaracteres de G é dada pela proposição seguinte.

Proposição 1.5.2. *Sejam $G = 1+A$ um grupo-álgebra sobre $\mathbb{F}_q$, $\nu \in A^\circ$ e L_ν o establizador esquerdo de ν em G. Então, a correspondência $g \mapsto \nu(g-1)$ define um caracter linear $\hat{\nu}$ de L_ν e temos*

$$\chi_\nu = \mathrm{Ind}_{L_\nu}^{G}(\hat{\nu}).$$

Demonstração. O subespaço vectorial $\mathbb{C}\varepsilon_\nu$ é um $\mathbb{C}[L_\nu]$-submódulo de $\mathfrak{L}_\nu$. Como

$$g \cdot \varepsilon_\nu = \overline{\nu(\pi(g^{-1}))}\varepsilon_\nu,$$

temos que $\mathbb{C}\varepsilon_\nu$ produz o caracter linear de L_ν dado pela correspondência

$$g \mapsto \overline{\nu(\pi(g^{-1}))}.$$

Vejamos que

$$\overline{\nu(\pi(g^{-1}))} = \nu(\pi(g)), \quad g \in L_\nu.$$

Repare-se que

$$\pi(g^{-1}) = g^{-1} - 1 = -g^{-1}(g-1) = -g^{-1}\pi(g),$$

logo

$$\nu(\pi(g^{-1})) = \nu(-g^{-1}\pi(g)) = \overline{\nu(g^{-1}\pi(g))} = \overline{(g\nu)(\pi(g))} = \overline{\nu(\pi(g))}$$

para todo $g \in L_\nu$.

Agora, o $\mathbb{C}[G]$-módulo $\mathfrak{L}_\nu$ decompõe-se em soma directa

$$\mathfrak{L}_\nu = \bigoplus_{\tau \in G\nu} \mathbb{C}\varepsilon_\tau$$

onde as várias componentes são permutadas transitivamente por G. Uma das parcelas desta soma é $\mathbb{C}\varepsilon_\nu$ e, portanto, como L_ν é o estabilizador de $\mathbb{C}\varepsilon_\nu$ em G, concluímos que

$$\mathfrak{L}_\nu = \mathrm{Ind}_{L_\nu}^{G}(\mathbb{C}\varepsilon_\nu).$$

O resultado segue-se. $\square$

1.6 Teoria de supercaracteres para grupos-álgebras

Tendo definido superclasses e supercaracteres para um grupo-álgebra $G = 1 + A$, resta verificar que o conjunto das superclasses $\mathcal{X}$ e conjunto dos supercaracteres $\mathcal{Y}$ formam uma teoria de supercaracteres para G.

Em primeiro lugar, provamos que todo o caracter irredutível é constituinte de algum supercaracter.

Proposição 1.6.1. *Sejam $G = 1+A$ um grupo-álgebra sobre $\mathbb{F}_q$ e $\{\nu_1, \ldots, \nu_t\}$ um conjunto de representantes para as órbitas esquerdas de G em A°. Então, $\mathbb{C}[A]$ decompõe-se na soma directa*

$$\mathbb{C}[A] = \mathfrak{L}_{\nu_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{L}_{\nu_t}$$

de $\mathbb{C}[G]$-submódulos, de modo que o caracter regular ρ_G se decompõe como soma

$$\rho_G = \chi_{\nu_1} + \cdots + \chi_{\nu_t}$$

de supercaracteres de G. Em particular, qualquer caracter irredutível de G é constituinte de pelo menos um supercaracter.

Demonstração. Como A° se decompõe como união disjunta

$$A^\circ = G\nu_1 \cup \cdots \cup G\nu_t$$

e A° é uma base de $\mathbb{C}[A]$ como espaço linear sobre $\mathbb{C}$, vem que

$$\mathbb{C}[A] = \mathfrak{L}_{\nu_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{L}_{\nu_t}$$

e, portanto, $\rho_G = \chi_{\nu_1} + \cdots + \chi_{\nu_t}$. O facto de todo o caracter irredutível ser constituinte de um supercaracter vem do facto de ele ser constituinte do caracter regular. □

Vejamos agora que os supercaracteres são ortogonais dois a dois. Relembremos que, denotando por $\langle -, - \rangle$ o produto interno de Frobenius, se tem

$$\langle \chi_\nu, \chi_\tau \rangle = \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathfrak{L}_\nu, \mathfrak{L}_\tau), \quad \nu, \tau \in A^\circ.$$

Usaremos este facto para provar a ortogonalidade dos supercaracteres.

Notemos que $\mathbb{C}[A]$ pode ser dotado de uma estrutura de $\mathbb{C}[G]$-módulo direito de maneira dual da que fizémos acima, em que definimos a acção à direita de G sobre A por

$$a \cdot g = ag + \pi(g), \quad a \in A,\ g \in G.$$

Estendendo esta acção por linearidade a $\mathbb{C}[A]$, vemos que a aplicação π se pode estender linearmente a um isomorfismo de $\mathbb{C}[G]$-módulos direitos $\pi\colon \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[A]$. Como antes, para cada $\nu \in A^\circ$, podemos considerar o $\mathbb{C}[G]$-submódulo direito

$$\mathfrak{R}_\nu = \varepsilon_\nu \mathbb{C}[G]$$

de $\mathbb{C}[A]$ que, como espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$, tem base $\{\varepsilon_\nu \mid \nu \in A^\circ\}$ e que produz um caracter de G, que é igual ao produzido pelo $\mathbb{C}[G]$-módulo esquerdo $\mathscr{L}_\nu$ (ou seja, poderíamos ter definido os supercaracteres usando a acção à direita de G sobre A°).

Lema 1.6.2. *Sejam $G = 1 + A$ um grupo-álgebra sobre $\mathbb{F}_q$ e $\nu \in A^\circ$. Então, existe um isomorfismo de espaços vectoriais*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathfrak{L}_\nu, \mathbb{C}[A]) \simeq \mathfrak{R}_\nu.$$

Em particular,

$$\langle \chi_\nu, \rho_G \rangle = |\nu G|$$

e, portanto, $|G\nu| = |\nu G|$.

Demonstração. Pelo teorema de Maschke, existe um $\mathbb{C}[G]$-módulo $\mathfrak{L}'_\nu$ tal que

$$\mathbb{C}[A] = \mathfrak{L}_\nu \oplus \mathfrak{L}'_\nu,$$

logo qualquer $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathfrak{L}_\nu, \mathbb{C}[A])$ pode ser estendido a um endomorphismo $\tilde{\phi} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[A])$ tal que

$$\mathfrak{L}'_\nu \subseteq \mathrm{Ker}(\tilde{\phi}).$$

Devido ao isomorphismo $\mathbb{C}[A] \simeq_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[G]$, vem que

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[A]) \simeq_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G])$$

e, portanto, existe um único $z \in \mathbb{C}[G]$ tal que

$$\tilde{\phi}(x) = x \cdot z, \quad x \in \mathbb{C}[A].$$

Temos

$$\phi(\varepsilon_\nu) = \tilde{\phi}(\varepsilon_\nu) = \varepsilon_\nu \cdot z \in \mathfrak{R}_\nu,$$

logo a correspondência $\phi \mapsto \phi(\varepsilon_\nu)$ define uma aplicação linear sobrejectiva

$$\psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathfrak{L}_\nu, \mathbb{C}[A]) \to \mathfrak{R}_\nu.$$

Vejamos que esta aplicação é injectiva. Se $\psi(\varepsilon_\nu) = 0$, então

$$\psi(g \cdot \varepsilon_\nu) = g \cdot \psi(\varepsilon_\nu) = 0, \quad g \in G$$

e, portanto, ψ é a aplicação nula. Segue-se que

$$Hom_{\mathbb{C}[G]}(\mathfrak{L}_\nu, \mathbb{C}[A]) \simeq \mathfrak{R}_\nu.$$

Para provar a segunda parte do lema, lembremo-nos que $\mathbb{C}[A]$ produz o caracter regular de G, logo

$$\langle \chi_\nu, \rho_G \rangle = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathfrak{L}_\nu, \mathbb{C}[A])) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{R}_\nu) = |\nu G|.$$

Repare-se que

$$\langle \rho_G, \chi_\nu \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_G(g)} \chi_\nu(g) = \chi_\nu(1) = |G\nu|,$$

o que termina a prova do lema. □

Proposição 1.6.3. *Sejam $G = 1 + A$ um grupo-álgebra sobre $\mathbb{F}_q$ e $\nu, \nu' \in A^\circ$. Então, existe um isomorfismo de espaços vectoriais*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathfrak{L}_\nu, \mathfrak{L}_{\nu'}) \simeq \mathfrak{R}_\nu \cap \mathfrak{L}_{\nu'}.$$

Em particular, temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathfrak{L}_\nu, \mathfrak{L}_{\nu'}) \neq \{0\} \iff G\nu G = G\nu' G,$$

logo

$$\langle \chi_\nu, \chi_{\nu'} \rangle \neq 0 \iff G\nu G = G\nu' G \iff \chi_\nu = \chi_{\nu'}.$$

Além disso, temos

$$\langle \chi_\nu, \chi_\nu \rangle = |G\nu \cap \nu G|.$$

Demonstração. Pela demonstração do lema anterior, vemos que

$$\phi \in Hom_{\mathbb{C}[G]}(\mathfrak{L}_\nu, \mathfrak{L}_{\nu'}) \iff \phi(\varepsilon_\nu) \in \mathfrak{L}_{\nu'} \cap \mathfrak{R}_\nu,$$

logo a correspondência $\phi \mapsto \psi(\varepsilon_\nu)$ induz um isomorfismo

$$Hom_{\mathbb{C}[G]}(\mathfrak{L}_\nu, \mathfrak{L}_{\nu'}) \simeq \mathfrak{R}_\nu \cap \mathfrak{L}_{\nu'}.$$

Assim, deduzimos que

$$\langle \chi_\nu, \chi_{\nu'} \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathfrak{L}_\nu, \mathfrak{L}_{\nu'}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{R}_\nu \cap \mathfrak{L}_{\nu'}).$$

Como $\{\varepsilon_\tau \mid \tau \in G\nu \cap \nu' G\}$ é uma base do espaço vectorial $\mathfrak{R}_\nu \cap \mathfrak{L}_{\nu'}$, vemos que

$$\mathfrak{R}_\nu \cap \mathfrak{L}_{\nu'} \neq 0 \iff G\nu \cap \nu' G \neq \emptyset,$$

o que é equivalente a $\nu' \in G\nu G$. □

1.7 Valores dos supercaracteres

O último passo para vermos que temos, de facto, uma teoria de supercaracteres é verificar que os supercaracteres são constantes nas superclasses. Para isso, iremos deduzir uma fórmula mais conveniente para os valores dos supercaracteres.

Com a notação anterior, seja $\nu \in A^\circ$ e considere-se o subespaço vectorial $\mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{L}_\nu \cap \mathfrak{R}_\nu$, que tem como base $\{\varepsilon_\tau \mid \tau \in G\nu \cap \nu G\}$. Logo,

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{D}_\nu) = |G\nu \cap \nu G| = \langle \chi_\nu, \chi_\nu \rangle.$$

Por outro lado, seja

$$S_\nu = \mathrm{Stab}_G(\mathfrak{D}_\nu) = \{g \in G \mid g \cdot \mathfrak{D}_\nu \subseteq \mathfrak{D}_\nu\}$$

o estabilizador de $\mathfrak{D}_\nu$ em G. Então, $\mathfrak{D}_\nu$ é um $\mathbb{C}[S_\nu]$-módulo e, portanto, produz um caracter de S_ν, que denotamos ς_ν.

Lema 1.7.1. *Sejam $G = 1 + A$ um grupo-álgebra sobre $\mathbb{F}_q$ e $\nu \in A^\circ$. Então, na notação acima, temos*

$$\chi_\nu = \mathrm{Ind}_{S_\lambda}^G(\varsigma_\nu).$$

Demonstração. Seja $T \subseteq G$ um conjunto completo de representantes de classes laterais esquerdas de S_ν em G, de modo que G é a união disjunta

$$G = \bigcap_{t \in T} tS_\nu.$$

Assim, a órbita esquerda $G\nu$ é a união disjunta

$$G\nu = \bigcap_{t \in T} t(G\nu \cap G\nu),$$

logo o $\mathbb{C}[G]$-módulo $\mathfrak{L}_\nu$ decompõe-se como a soma directa

$$\mathfrak{L}_\nu = \bigoplus_{t \in T} t \cdot \mathfrak{D}_\nu = \bigoplus_{t \in T} \mathfrak{D}_{t \cdot \nu}$$

de subespaços vectoriais que são permutados transitivamente por G. Como $S_\nu = \mathrm{Stab}_G(\mathfrak{D}_\nu)$, temos que

$$\mathfrak{L}_\nu = \mathrm{Ind}_{S_\nu}^G(\mathfrak{D}_\nu)$$

e o resultado segue-se. □

Lema 1.7.2. *Sejam $G = 1+A$ uma grupo-álgebra sobre $\mathbb{F}_q$ e $\nu \in A^\circ$. Então,*

$$(\varsigma_\nu)^\circ(g) = \frac{|G\nu|}{|G\nu G|} \sum_{\tau \in \nu G} \tau(\pi(g)) = \frac{|G\nu|}{|G\nu G|} \sum_{\tau \in \nu G} \tau(g-1)$$

para todo o g em G.

Demonstração. Para qualquer $g \in G$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau \in \nu G} \tau(\pi(g)) =& \frac{|\nu G|}{|G|} \sum_{h \in G} (\nu h^{-1})(\pi(g)) = \frac{|\nu G|}{|G|} \sum_{h \in G} \nu(\pi(g)h) \\
&= \frac{|\nu G|}{|G|} \sum_{h \in G} \nu(\pi(gh) - \pi(h)) = \frac{|\nu G|}{|G|} \sum_{h \in G} \nu(\pi(gh))\overline{\nu(\pi(h))} \\
&= \frac{|\nu G|}{|G|} \sum_{h \in G} \nu(g\pi(h) + \pi(g))\overline{\nu(\pi(h))} \\
&= \frac{|\nu G|\nu(\pi(g))}{|G|} \sum_{h \in G} (g^{-1}\nu)(\pi(h))\overline{\nu(\pi(h))}.
\end{aligned}$$

Como $\nu, g^{-1}\nu \in A^\circ$ e $\pi \colon G \to A$ é bijectiva, vem

$$\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} (g^{-1}\nu)(\pi(h))\overline{\nu(\pi(h))} = \langle g^{-1}\nu, \nu \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } g^{-1}\nu = \nu, \\ 0, & \text{se } g^{-1}\nu \neq \nu. \end{cases}$$

Logo,

$$\sum_{\tau \in \nu G} \tau(\pi(g)) = \begin{cases} |\nu G|\nu(\pi(g)), & \text{se } g\nu = \nu, \\ 0, & \text{se } g\nu \neq \nu. \end{cases}$$

Se $g \notin S_\nu$, então $g\nu \neq \nu$ e, portanto, a igualdade desejada verifica-se neste caso.

Para $g \in S_\nu$, calculemos $\varsigma_\nu(g) = \operatorname{tr}(g, \mathfrak{D}_\nu)$. Para qualquer $\tau \in G\nu \cap \nu G$, temos que

$$g \cdot \varepsilon_\tau = \overline{\tau(\pi(g^{-1}))}\varepsilon_{g\tau},$$

logo

$$\varsigma_\nu(g) = \sum_{\substack{\tau \in \nu G \cap G\nu \\ g\tau = g}} \overline{\tau(\pi(g^{-1}))}$$

Como $\tau \in \nu G$, pode verificar-se que $g\tau = \tau \iff g\nu = \nu$, logo

$$\varsigma_\nu(g) \neq 0 \iff g\nu = \nu.$$

Assim, falta provar que

$$\varsigma_\nu(g) = \frac{|G\nu||\nu G|}{|G\nu G}\, \nu(\pi(g)) = |G\nu \cap \nu G|\, \nu(\pi(g))$$

para todo o $g \in S_\nu$ tal que $g\nu = \nu$. Neste caso, podemos repetir os cálculos acima para conferir que

$$\begin{aligned}(\nu h)(\pi(g^{-1})) &= \nu(\pi(g^{-1}))(g\nu)(\pi(h^{-1}))\overline{\nu(\pi(g^{-1}))} \\ &= \nu(\pi(g^{-1}))(\nu)(\pi(h^{-1}))\overline{\nu(\pi(g^{-1}))} = \nu(\pi(g^{-1}))\end{aligned}$$

para todo o $h \in G$. Logo,

$$\varsigma_\nu(g) = \sum_{\tau \in G\nu\cap\nu G} \overline{\tau(\pi(g^{-1}))} = |G\nu \cap \nu G|\, \overline{(\pi(g^{-1}))}.$$

Para finalizar, como $\pi(1) = 0$, temos

$$\nu(\pi(g)) = (g\nu)(\pi(g)) = \nu(g^{-1}\pi(g)) = \nu(\pi(g^{-1}g) - \pi(g^{-1})) = \overline{\nu(\pi(g^{-1}))},$$

logo

$$\varsigma_\nu(g) = |G\nu \cap \nu G|\, \nu(\pi(g)),$$

o que completa a prova. $\square$

Tendo em conta os dois lemas anteriores, o resultado seguinte resulta facilmente.

Teorema 1.7.3. *Sejam $G = 1 + A$ um grupo-álgebra sobre $\mathbb{F}_q$ e $\nu \in A^\circ$. Então,*

$$\chi_\nu(g) = \frac{|G\nu|}{|G\nu G|} \sum_{\tau \in G\nu G} \tau(g-1), \quad g \in G.$$

Demonstração. Sejam $g \in G$ e $T \subset G$ um conjunto completo de representantes de classes laterais esquerdas de S_ν em G. Pelos lemas anteriores, temos

$$\chi_\nu(g) = \sum_{t\in T} (\varsigma_\nu)^\circ(t^{-1}gt) = \frac{|G\nu|}{|G\nu G|} \sum_{t\in T}\sum_{\tau\in\nu G} \tau(\mu(t^{-1}gt)).$$

Como $\mu(t^{-1}gt) = t^{-1}\mu(g)t$ e $\tau \mapsto t\tau t^{-1}$ define uma bijecção $\nu G \mapsto t\nu G t^{-1} = t\nu G$, vem

$$\sum_{\tau\in\nu G} \tau(\mu(t^{-1}gt)) = \sum_{\tau\in\nu G} \tau(t^{-1}\mu(g)t) = \sum_{\tau\in\nu G} (t\tau t^{-1})(\nu(g)) = \sum_{\tau\in\nu G} \tau(\nu(g))$$

para todo o $t \in T$.

Como $S_\nu \nu \subseteq \nu G$, a órbita bilateral $G\nu G$ decompõe-se como união disjunta

$$G\nu G = \bigcup_{t \in T} t\nu G$$

e, portanto, concluimos que

$$\chi_\nu(g) = \frac{|G\nu|}{|G\nu G|} \sum_{t \in T} \sum_{\tau \in t\nu G} \tau(\mu(g)) = \frac{|G\nu|}{|G\nu G|} \sum_{\tau \in G\nu G} \tau(\mu(g)),$$

como queriamos. □

Recordando que a superclasse que contém $g \in G$ é o conjunto $\mathbb{K} = 1 + G\pi(g)G$, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 1.7.4. *Sejam $G = 1 + \mathcal{A}$ um grupo-álgebra sobre $\mathbb{F}_q$, $\nu \in A^\circ$ e $g \in G$. Então,*

$$\chi_\nu(g) = \frac{\varsigma_\nu(1)}{|K|} \sum_{h \in K} \nu(h-1)$$

onde $K \subseteq G$ é a superclasse que contém g.

Demonstração. Como $G\mu(g)G$ e $G\nu G$ são órbitas para a acção de $G \times G$ em A e A°, respectivamente, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{h \in K} \nu(\pi(h)) &= \frac{|G|^2}{|G\mu(g)G|} \sum_{x,y \in G} \nu(x\pi(g)y) = \frac{|G|^2}{|G\mu(g)G|} \sum_{x,y \in G} (x^{-1}\nu y^{-1})(\pi(g)) \\ &= \frac{|G|^2}{|G\mu(g)G} \frac{G\nu G}{|G|^2} \sum_{\tau \in G\nu G} \tau(\pi(g)) = \frac{G\nu G}{|G\pi(g)G} \sum_{\tau \in G\nu G} \tau(\pi(g)).\end{aligned}$$

Pelo teorema anterior, concluímos que

$$\chi_\nu(g) = \frac{|G\nu|}{|G\nu G} \sum_{\tau \in G} \tau(\pi(g)) = \frac{|G\nu|}{|G\pi(g)G} \sum_{h \in K} \nu(\pi(h)),$$

como queríamos demonstrar. □

Pelo último resultado, vemos que os supercaracteres são constantes nas superclasses, logo temos uma teoria de supercaracteres para o grupo-álgebra $G = 1 + A$. É a esta teoria que nos iremos referir como a *teoria de supercaracteres* de G.

Capítulo 2

Noções gerais

Neste capítulo, resumimos as noções e resultados gerais que vão ser necessários para o nosso estudo. Este resultados podem ser encontrados com maior detalhe em [?] [?] [?] [?] [?] [?]

2.1 Feixes: teoria clássica

Nesta secção, X denotará um espaço topológico.

Definição. Por um *préfeixe* de grupo abelianos sobre X entendemos um objecto $\mathscr{F}$ que consiste em:

- um grupo abeliano $\mathscr{F}(U)$ para cada aberto U de X,
- um morfismo de grupo abelianos $\rho_{U,V} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ para cada par (U, V) de abertos de X com $V \subseteq U$,

de forma a que sejam satisfeitas as propriedades seguintes:

- $\rho_{U,U} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$ é a aplicação identidade.
- Se $W \subseteq V \subseteq U$ são abertos de X, então $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$.

A cada morfismo $\rho_{U,V}$ chamamos o morfismo de restrição e, para cada $s \in \mathscr{F}(U)$, denotaremos a imagem $\rho_{U,V}(s) \in \mathscr{F}(V)$ por $s_{|V}$.

Os préfeixes são essencialmente correspondências entre abertos e estruturas álgebricas. No entanto, esta correspondência está sujeita a poucas condições, ou seja, a dependência na topologia de X é bastante pequena. Por isso, estamos interessados em objectos mais rígidos, que reflictam apropriadamente a dependência do espaço topológico X.

Definição. Um préfeixe $\mathscr{F}$ em X diz-se um *feixe* se satisfizer a condição seguinte:

- Se U for um aberto de X, $\{U_i\}_{i\in I}$ for uma cobertura aberta de U e $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$, para $i \in I$, forem tais que $s_{i|U_i\cap U_j} = s_{j|U_i\cap U_j}$ para todos $i, j \in I$, então existe um e um só $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s_{U_i} = s_i$ para todo o $i \in I$.

De maneira similar, podemos definir (pré)feixe de anéis sobre X ou, para dado anel R, (pré)feixe de R-módulos sobre X.

A definição de feixe já reflecte a dependência da topologia de X. Dada uma variedade M, obtemos um feixe (de anéis) se, a cada aberto U de M, fizermos corresponder o anel $C^\infty(U)$. A condição imposta reflecte o facto de, dada um cobertura $\{V_i\}_{i\in I}$ da variedade M e dadas funções $f, g\colon M \to \mathbb{C}$, se f e g coincidirem em cada aberto da cobertura, então $f = g$ (unicidade) e, também, o facto de, se tivermos uma colecção de funções definidas em cada elemento da cobertura e tais que concordem nas intersecções, então podemos prolongá-las a uma função definida em M.

Definição. Se $\mathscr{F}$ for feixe em X e $x \in X$, definimos o *germe* de $\mathscr{F}$ em x como sendo o limite directo

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim_{x\in U} \mathscr{F}(U)$$

tomado sobre todos os abertos de X que contêm x. Assim, para qualquer aberto U de X com $x \in U$, existe uma aplicação natural $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_x$ e, portanto, qualquer elemento $s \in \mathscr{F}(U)$ determina um elemento $s_x \in \mathscr{F}_x$.

Definição. Se $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ forem préfeixes ou feixes em X, um *morfismo* $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ é uma colecção de morfismos $\varphi_U\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$, em que U é um aberto de X, tal que, para quaisquer abertos $V \subseteq U$ de X o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho_{U,V}"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{U,V}"] \\
\mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"'] & \mathscr{G}(V)
\end{tikzcd}$$

é comutativo, onde $\rho_{U,V}$ e $\rho'_{U,V}$ são os morfismos de restrição de $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$, respectivamente.

A colecção dos feixes de grupos abelianos sobre X constituem os objectos de uma categoria, que denotaremos por $\mathbf{Sh}(X)$, em que os morfismos são os morfismos de feixes. Como é usual, se $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ forem objectos de $\mathbf{Sh}(X)$, denotaremos por

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}(\mathscr{F},\mathscr{G})$$

o conjunto dos morfismos $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$. A categoria $\mathbf{Sh}(X)$ é abeliana. Se R for um anel comutativo e com identidade, podemos definir de modo análogo a categoria dos feixes de R-módulos em X que denotaremos por $\mathbf{Sh}(X, R)$. Notemos que $\mathbf{Sh}(X) = \mathbf{Sh}(X, \mathbb{Z})$.

Definição. Se $f\colon X \to Y$ for uma aplicação contínua de espaços topológicos, definimos:

- Para qualquer feixe $\mathscr{F}$ em X, a *imagem directa* $f_*\mathscr{F}$ como sendo o feixe em Y dado por

  $$f_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V))$$

  para todo o aberto V de Y.

- Para qualquer feixe $\mathscr{G}$ em Y, a *imagem inversa* $f^*\mathscr{G}$ como sendo o feixe em X dado por

  $$f^*\mathscr{G}(U) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V} \mathscr{G}(V)$$

  onde U é um aberto de X e o limite é tomado sobre todos os abertos V de Y que contêm $f(U)$.

São válidas as propriedades seguintes:

- Para qualquer $y \in Y$, temos

  $$(f^*\mathscr{G})_y \simeq \mathscr{G}_{f(y)}.$$

- Se Z for um espaço topológico, $g\colon Y \to Z$ for uma aplicação contínua e $\mathscr{H}$ for um feixe em Z, então

  $$(g \circ f)^*\mathscr{H} \simeq f^*(g^*\mathscr{H}).$$

- Se $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ forem como acima, existe uma bijecção natural

  $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}(f^*\mathscr{G},\mathscr{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(Y)}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$$

  (o que significa que o functor f^* é adjunto à esquerda de f_*).

Definição. Para qualquer préfeixe $\mathscr{F}$ num espaço topológico X, existe um feixe $\mathscr{F}^+$ e um morfismo de préfeixes $\theta\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ tal que, para qualquer feixe $\mathscr{G}$ e qualquer morfismo $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, existe um único morfismo $\psi\colon \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ tal que $\varphi = \psi \circ \theta$. Ao feixe $\mathscr{F}^+$ chamamos a *feixificação* do préfeixe $\mathscr{F}$.

A feixificação de um préfeixe é única a menos de isomorfismo e a feixificação de um feixe é ele mesmo.

Definição. Se A for um grupo abeliano (anel, R-módulo, etc.), definimos o *feixe constante* em X associado a A como sendo a feixificação do préfeixe $\mathscr{F}$ em X tal que $\mathscr{F}(U) = A$ para qualquer aberto U de X.

Pode provar-se que, para qualquer aberto $U \subseteq X$, $\mathscr{F}^+(U)$ é constituído por todas as funções contínuas $U \to A$ quando consideramos A munido da topologia discreta. Em particular, definimos o *feixe nulo* em X como sendo a feixificação do préfeixe $\mathscr{F}$ em X tal que $\mathscr{F}(U) = 0$ para qualquer aberto U de X.

Definição. Dizemos que um feixe $\mathscr{F}$ em X é:

- um *sistema local* (ou um *feixe localmente constante*) se existir uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de X tal que, se $i_\alpha\colon U_\alpha \to X$ for o morfismo de inclusão, então ${i_\alpha}^*\mathscr{F}$ é um feixe constante em U_α.

- *construtível* se existir uma cobertura finita $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ de X em conjuntos localmente fechados tal que, para qualquer $1 \leq k \leq m$, se $i_k\colon X_k \to X$ for o morfismo de inclusão, então ${i_k}^*\mathscr{F}$ é um sistema local em X_k.

Para terminar, resumimos algumas definições naturais.

Definição. Dado um feixe $\mathscr{F}$ em X, chamamos *subfeixe* de $\mathscr{F}$ a qualquer feixe $\mathscr{F}'$ em X tal que, para todo o aberto U de X, $\mathscr{F}'(U)$ é um subgrupo (subanel, submódulo, etc.) de $\mathscr{F}(U)$ e tal que os morfismos de restrição de $\mathscr{F}'$ sejam induzidos naturalmente pelos de $\mathscr{F}$.

Definição. Dado um morfismo $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de feixes em X, definimos:

- O *núcleo* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ de φ como sendo o feixe dado por $U \mapsto \mathrm{Ker}(\varphi(U))$.

- A *imagem* $\mathrm{Im}(\varphi)$ de φ como sendo a feixificação do préfeixe dado por $U \mapsto \mathrm{Im}(\varphi(U))$.

Verifica-se que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ é um subfeixe de $\mathscr{F}$ e que $\mathrm{Im}(\varphi)$ é um subfeixe de $\mathscr{G}$.

Definição.

- Dado um subfeixe $\mathscr{F}'$ de um feixe $\mathscr{F}$ em X, definimos o *feixe quociente* $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$ como sendo a feixificação do préfeixe dado por $U \mapsto \mathscr{F}(U)/\mathscr{F}'(U)$.

- Dados dois feixes $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ em X, definimos a *soma directa* o feixe $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ como o feixe dado por $U \mapsto \mathscr{F}(U) \oplus \mathscr{G}(U)$.

- Se R for um anel e $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ forem feixes de R-módulos em X, definimos o *produto tensorial* $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$ como sendo o feixe dado por $U \mapsto \mathscr{F}(U) \otimes_R \mathscr{G}(U)$.

- Se $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ forem feixes em X, definimos $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ como sendo o feixe dado por $U \mapsto \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})(U) = Hom_{\mathbf{Sh}(U)}((i_U)^*\mathscr{F}, (i_U)^*\mathscr{F})$ onde $i_U \colon U \to X$ é o morfismo de inclusão.

2.2 Esquemas

Para os nossos propósitos, precisaremos de um análogo não-clássico da teoria de feixes. Para a introduzirmos, é conveniente usar a linguagem dos esquemas.

Definição.

- Um *espaço anelado* é um par $(X, \mathscr{O}_X)$ onde X é um espaço topológico e $\mathscr{O}_X$ é um feixe de anéis em X. Um *morfismo de espaços anelados* $(X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ é um par $(\phi, \phi^\sharp)$ em que $\phi \colon X \to Y$ é uma aplicação continua e $\phi^\sharp \colon \mathscr{O}_Y \to \phi_* \mathscr{O}_X$ é um morfismo de feixes. Qualquer morfismo $(X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ de espaços anelados induz um morfismo dos germes $\mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ para todo $x \in X$.

- Um *espaço localmente anelado* é um espaço anelado $(X, \mathscr{O}_X)$ em que o germe $\mathscr{O}_{X,x}$ é um anel local (isto é, um anel comutativo com identidade que tem um único ideal maximal). Um *morfismo de espaços localmente anelados* $(X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ é um morfismo de espaços anelados $(\phi, \phi^\sharp) \colon (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ que induz um morfismo local $\mathscr{O}_{Y,\phi(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ para todo $x \in X$ (isto significa que, para qualquer $x \in X$, a imagem inversa do ideal maximal de $\mathscr{O}_{X,x}$ é o ideal maximal de $\mathscr{O}_{Y,\phi(x)}$).

Para qualquer anel comutativo com identidade R, definimos o *espectro de* R, que denotamos por $\mathrm{Spec}(R)$, como sendo o conjunto de todos os ideais primos de R. Dado qualquer subconjunto $T \subseteq R$ definimos o subconjunto $V(T) \subset \mathrm{Spec}(R)$ por

$$V(T) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid T \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Obtemos assim uma topologia em $\operatorname{Spec}(R)$ em que os subconjuntos fechados são exactamente os subconjuntos $V(T)$ para $T \subseteq R$. A esta topologia chamamos a *topologia de Zariski* de $\operatorname{Spec}(R)$. Se, para cada $f \in R$, definirmos

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid f \notin \mathfrak{p}\},$$

obtemos uma base de abertos $\{D(f) \mid f \in R\}$ para a topologia de Zariski em $\operatorname{Spec}(R)$. A estes abertos chamamos os *abertos principais* de $\operatorname{Spec}(R)$. Notemos que $D(1) = \operatorname{Spec}(R)$.

A topologia de Zariski em $\operatorname{Spec}(R)$ relaciona-se com a estrutura do anel R da forma seguinte. Dado qualquer ideal primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, consideramos a localização $R_\mathfrak{p}$ de R em $\mathfrak{p}$. Definimos o *feixe de estrutura* $\mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(R)}$ como se segue. Para cada $f \in R$, definimos

$$\mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(R)}(D(f)) = R_f$$

onde R_f é o anel localizado em f e, para cada aberto $U \subseteq \operatorname{Spec}(R)$, definimos

$$\mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(R)}(U) = \varprojlim_{D(f)\subseteq U} \mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(R)}(D(f)) = \varprojlim_{D(f)\subseteq U} R_f$$

onde o limite inverso é tomado sobre todos os abertos principais que estão contidos em U.

A correspondência $U \mapsto \mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(R)}(U)$ define um feixe de anéis em $\operatorname{Spec}(R)$ em que

$$\mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(R),\mathfrak{p}} \simeq R_\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R).$$

Assim, o par $(\operatorname{Spec}(R), \mathscr{O}_R)$ é um espaço localmente anelado.

Se $\phi\colon R \to R'$ for um morfismo de anéis comutativos e com identidade, então ϕ induz de modo natural um morfismo de espaços localmente anelados

$$(\phi, \phi^\sharp)\colon (\operatorname{Spec}(R'), \mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(R')}) \to (\operatorname{Spec}(R), \mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(R)}).$$

Além disso, qualquer morfismo de espaços anelados de $(\operatorname{Spec}(R'), \mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(R')})$ em $(\operatorname{Spec}(R), \mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(R)})$ é obtido por este processo a partir de um morfismo de anéis $R \to R'$. De facto, o morfismo de feixes $\phi^\sharp\colon \mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(\Bbbk)} \to \phi^*\mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(R)}$ induz um morfismo de anéis $\phi^*\colon R' \to R$ (basta considerar os abertos principais $D(1)$ em $\operatorname{Spec}(R')$ e $\operatorname{Spec}(R)$). Referimo-nos a ϕ^* como o *comorfismo* associado a ϕ.

Definição.
- Um *esquema afim* é um espaço localmente anelado $(X, \mathscr{O}_X)$ que é isomorfo, como espaço localmente anelado, a $(\operatorname{Spec}(R), \mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(R)})$ em que R é algum anel comutativo e com identidade.

- Um *esquema* é um espaço localmente anelado $(X, \mathscr{O}_X)$ em que, para qualquer ponto de X, existe uma vizinhança aberta U de x tal que o par $(U, {i_U}^*\mathscr{O}_X)$, induzido pela inclusão $i_U \colon U \to X$, é um esquema afim. Os morfismos entre esquemas são os morfismos entre os respectivos espaços localmente anelados.

Para simplificar, denotaremos um esquema $(X, \mathscr{O}_X)$ apenas por X, subentendendo o feixe de estrutura $\mathscr{O}_X$, e um morfismo de esquema $(\phi, \phi^\sharp)$ apenas por ϕ, subentendendo o morfismo de feixes $\phi^\sharp$.

Definição. Dado um esquema S, por um *esquema sobre* S (ou, um S-*esquema*) entendemos um par (X, λ) em que X é um esquema e $\lambda\colon X \to S$ é um morfismo de esquemas, a que chamaremos o *morfismo de estrutura*; dizemos que S é o *esquema-base* de X. Um *morfismo de S-esquemas* $(X, \lambda) \to (Y, \mu)$, a que nos referimos por *S-morfismo*, é um morfismo de esquemas $\phi\colon X \to Y$ tal que $\lambda = \mu \circ \phi$, isto é, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\lambda"'] & Y \arrow[d, "\mu"] \\ & S \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Para simplificar a notação, denotaremos um S-esquema (X, λ) apenas por X, subentendendo o morfismo de estrutura λ. Dados S-esquemas X e Y, denotaremos por

$$\mathrm{Hom}_S(X, Y)$$

o conjunto de todos os S-morfismos $X \to Y$.

Definição. Se R for um anel comutativo com identidade, dizemos que um esquema é um *esquema sobre* R (ou, um R-*esquema*) se for um esquema sobre $\mathrm{Spec}(R)$; referimo-nos a um morfismo de R-esquemas por *R-morfismo* e, dados R-esquemas, denotaremos por

$$\mathrm{Hom}_R(X, Y)$$

o conjunto de todos os R-morfismos $X \to Y$.

No caso em que $X = \mathrm{Spec}(R')$ for um R-esquema afim (em que R' é um anel comutativo com identidade), o morfismo de estrutura $\lambda\colon X \to \mathrm{Spec}(R)$ corresponde univocamente a um morfismo de anéis $\lambda^*\colon R \to R'$, o que nos permite considerar R' como uma R-álgebra (comutativa).

De seguida, consideramos produtos de esquemas.

Definição. • Se X e Y forem esquemas, existe um esquema $X \times Y$, que é único a menos de isomorfismo, para o qual existem morfismos $p_1\colon X \times Y \to X$ e $p_2\colon X \times Y \to Y$ tais que, para qualquer esquema Z e quaisquer morfismos $f\colon Z \to X$ e $g\colon Z \to Y$, existe um e um só morfismo $h\colon Z \to X \times Y$ que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ & X \times Y \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

comutativo, isto é, $f = p_1 \circ h$ e $g = p_2 \circ h$. Ao esquema $X \times Y$ chamamos o *produto* de X e Y e aos morfismos p_1 e p_2 chamamos as *projecções* de $X \times Y$ em X e Y, respectivamente.

• Dado um esquema S, se X e Y forem S-esquemas, com morfismos de estrutura $\lambda\colon X \to S$ e $\mu\colon Y \to S$, então existe um S-esquema $X \times_S Y$, que é único a menos de isomorfismo, para o qual existem morfismos $p_1\colon X \times_S Y \to X$ e $p_2\colon X \times_S Y \to Y$ satisfazendo $\lambda \circ p_1 = \mu \circ p_2$ e tais que, para qualquer esquema Z e quaisquer morfismos $f\colon Z \to X$ e $g\colon Z \to Y$ satisfazendo $\lambda \circ f = \mu \circ g$, existe um e um só morfismo $h\colon Z \to X \times_S Y$ tal que $f = p_1 \circ h$ e $g = p_2 \circ h$. Esta situação é ilustrada pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\ & X \times_S Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d, "\mu"] \\ & X \arrow[r, "\lambda"] & S \end{tikzcd}$$

Ao esquema $X \times_S Y$ chamamos o *produto fibrado* de X e Y e aos morfismos p_1 e p_2 chamamos as *projecções* de $X \times_S Y$ em X e Y, respectivamente.

No caso em que $X = \operatorname{Spec}(A)$, $Y = \operatorname{Spec}(B)$ são esquemas afins sobre um esquema afim $S = \operatorname{Spec}(R)$, cada um dos anéis (comutativos e com identidade) A e B tem uma estrutura natural de R-álgebra, de modo que podemos formar a R-álgebra $A \otimes_R B$. Esta R-álgebra é comutativa e, portanto, determina o esquema afim $\mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ que, a menos de isomorfismo, é o produto fibrado $\mathrm{Spec}(A) \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(B)$, isto é,

$$\mathrm{Spec}(A) \times_R \mathrm{Spec}(B) \simeq \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$$

onde, para simplificar, escrevemos $\times_R$ em vez de $\times_{\mathrm{Spec}(R)}$.

O exemplo que se segue ilustra a importância do morfismo de estrutura. Considerando o esquema afim $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$, temos que

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{C})} \mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}).$$

Se o considerarmos sobre $\mathrm{Spec}(\mathbb{R})$, temos

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{R})} \mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{R}^4).$$

No entanto, $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ e $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}^4)$ não são isomorfos como esquemas.

Se R for um anel comutativo com identidade e X for um esquema sobre $\mathrm{Spec}(R)$, diremos simplesmente que X é um *esquema sobre* R (ou, um R-*esquema*). Em particular, um esquema sobre um corpo $\Bbbk$ é um esquema X munido de um morfismo de estrutura $\lambda\colon X \to \mathrm{Spec}(\Bbbk)$; notemos que $\mathrm{Spec}(\Bbbk)$ só tem um ponto, o ideal nulo $\{0\}$. Se $\Bbbk \subseteq \Bbbk'$ for uma extensão de corpos, a inclusão $\Bbbk \hookrightarrow \Bbbk'$ determina um morfismo de esquemas $\mathrm{Spec}(\Bbbk') \to \mathrm{Spec}(\Bbbk)$, de modo que $\mathrm{Spec}(\Bbbk')$ é um $\Bbbk$-esquema. Por outro lado, se X for um $\Bbbk$-esquema, o produto fibrado $X \times_{\Bbbk} \mathrm{Spec}(\Bbbk')$, que denotaremos apenas por $X \times_{\Bbbk} \Bbbk'$, é um $\Bbbk'$-esquema. Dizemos que $X \times_{\Bbbk} \Bbbk'$ é obtido de X fazendo uma *extensão de base.*

Definição. Um esquema X diz-se:

- *conexo* se X for um espaço topológico conexo;
- *separado* se a imagem $\Delta(X)$ do *morfismo diagonal*

  $$\Delta\colon X \to X \times X, \quad x \mapsto (x, x),$$

  for um subconjunto fechado de $X \times X$;
- *reduzido* se, para qualquer aberto U de X, o anel $\mathscr{O}_X(U)$ não tiver elementos nilpotentes (isto é, elementos não-nulos f tais que $f^m = 0$ para algum $m \in \mathbb{N}$).

Se R for um anel comutativo e com identidade, então $\operatorname{Spec}(R)$ é um esquema separado; deste modo, qualquer esquema afim é separado. Por outro lado, $\operatorname{Spec}(R)$ será conexo se e só se 0 e 1 forem os únicos idempotentes de R. Em particular, se $x_1, \ldots, x_n$ forem indeterminadas e $\Bbbk$ for um corpo, o esquema $\operatorname{Spec}(\Bbbk[x_1, \ldots, x_n])$ associado ao anel polinomial $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ é conexo. Nesta situação, simplificamos a notação pondo $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e escrevendo

$$\Bbbk[\mathbf{x}] = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n].$$

Definição. Se $\Bbbk$ for um corpo e X for um $\Bbbk$-esquema, dizemos que X é:

- *geometricamente conexo* se, para qualquer extensão de corpos $\Bbbk \subseteq \Bbbk'$, o esquema $X \times_{\Bbbk} \Bbbk'$ for conexo;
- *suave* se, para qualquer $x \in X \times_{\Bbbk} \bar{\Bbbk}$, onde $\bar{\Bbbk}$ é o fecho algébrico de $\Bbbk$, o germe de $\mathscr{O}_{X \times_{\Bbbk} \bar{\Bbbk}, x}$ em x for um anel regular;
- *de tipo finito* sobre $\Bbbk$ se o morfismo de estrutura $\lambda \colon X \to \operatorname{Spec}(\Bbbk)$ for um *morfismo finito*, isto é, se existir uma cobertura aberta finita $\{U_k\}_{1 \leq k \leq m}$ de X tal que, para qualquer $1 \leq k \leq m$, a inclusão $i_k \colon U_k \to X$ induz um esquema afim $(U_k, {i_k}^* \mathscr{O}_X)$ que é isomorfo a $\operatorname{Spec}(A_k)$ para alguma $\Bbbk$-álgebra (comutativa) A_k que é finitamente gerada (como álgebra).

Mais geralmente:

Definição. Dizemos que um morfismo de esquemas $\phi \colon X \to Y$ é um *morfismo finito* se existir uma cobertura aberta finita $\{V_k\}_{1 \leq k \leq m}$ de Y tal que, para qualquer $1 \leq k \leq m$:

- a inclusão $j_k \colon V_k \to Y$ induz um esquema afim $(V_k, {j_k}^* \mathscr{O}_Y)$ que é isomorfo a $\operatorname{Spec}(B_k)$ para algum anel comutativo com identidade B_k,
- a inclusão $i_k \colon \phi^{-1}(V_k) \to X$ induz um esquema afim $(\phi^{-1}(V_k), {i_k}^* \mathscr{O}_X)$ que é isomorfo a $\operatorname{Spec}(A_k)$ para alguma B_k-álgebra (comutativa) A_k que é finitamente gerada (como álgebra).

Se X for um esquema de tipo finito sobre um corpo $\Bbbk$, então X é suave se e só se for reduzido.

Neste trabalho, consideraremos apenas variedades algébricas sobre um corpo $\Bbbk$. Para os nossos propósitos, chamamos *variedade algébrica sobre* $\Bbbk$ (ou, $\Bbbk$-*variedade algébrica*) a qualquer $\Bbbk$-esquema que seja reduzido, separado e de tipo finito. Esta definição é equivalente à definição clássica de variedade algébrica. Por exemplo, quando V é uma variedade afim sobre $\Bbbk$ com anel de coordenadas $\Bbbk[V]$, o esquema que lhe corresponde é $\mathrm{Spec}(\Bbbk[V])$. Os pontos de V correspondem bijectivamente aos *pontos fechados* de $\mathrm{Spec}(\Bbbk[V])$. De facto, os pontos de V correspondem bijectivamente aos ideais maximais de $\Bbbk[V]$ e um ponto de $\mathrm{Spec}(\Bbbk[V])$ (isto é, um ideal primo de $\Bbbk[V]$) é um ponto fechado se e só se for um ideal maximal de $\Bbbk[V]$.

2.3 Feixes num espaço étale

A topologia de Zariski não é suficiente para os efeitos necessários devido a vários problemas (nomeadamente porque não tem abertos suficientes). Por isso, Grothendieck estendeu a noção clássica de feixe num espaço topológico, observando que um feixe é essencialmente um functor contravariante da categoria dos abertos de um espaço topológico para a categoria dos grupos abelianos (anéis, R-módulos, etc.).

Ao longo da secção, denotamos por X um esquema que supomos ser separado e de tipo finito sobre um corpo algebricamente fechado.

Definição. Se U for um esquema, dizemos que um morfismo (de esquemas) $u\colon U \to X$ é um *morfismo étale* se:

- a fibra $u^{-1}(x)$ for finita para qualquer ponto fechado $x \in X$;
- para qualquer ponto fechado $x \in X$ e qualquer o $y \in u^{-1}(x)$, o morfismo nos germes $\mathscr{O}_{U,y} \to \mathscr{O}_{X,x}$ induzir um isomorfismo nas suas completações com respeito aos respectivos ideais maximais.

Dizemos também que o par (U, u) é *conjunto aberto étale* em X.

Em particular, dado um aberto U de X, a inclusão $i_U\colon U \to X$ determina um esquema $(U, {i_U}^*\mathscr{O}_X)$ e $i_U\colon U \to X$ é morfismo étale. Logo, qualquer aberto de X determina um conjunto aberto étale em X; no entanto, nem todos os abertos étale são definidos por subconjuntos abertos de X.

Definição. Um *morfismo de abertos étale* $(U, u) \to (V, v)$ em X é um morfismo de esquemas $w\colon U \to V$ tal que $u = v \circ w$. Mais informalmente, um morfismo de abertos étale em X é um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "w"] \arrow[dr, "u"'] & & V \arrow[dl, "v"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Denotaremos por $\mathbf{Et}(X)$ a categoria dos abertos étale em X, em que os morfismos são os morfismos de abertos étale.

Definição. Definimos um *préfeixe étale* de grupos abelianos (anéis, R-módulos, etc.) em X como sendo um functor contravariante $\mathscr{F}$ da categoria $\mathbf{Et}(X)$ para a categoria dos grupos abelianos (anéis, R-módulos, etc.). Assim, a qualquer morfismo étale $U \to X$ associamos um grupo abeliano (anel, R-módulo, etc.) $\mathscr{F}(U \to X)$ e um morfismo

$$\rho_{U,V} \colon \mathscr{F}(U \to X) \to \mathscr{F}(V \to X)$$

para cada morfismo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr] \arrow[dr] & & V \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

em $\mathbf{Et}(X)$, de modo que:

- $\rho_{U,U}$ é o morfismo identidade;
- $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ sempre que temos morfismos

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[dr] & V \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

em $\mathbf{Et}(X)$. Para simplificar, chamaremos *préfeixe* em $\mathbf{Et}(X)$ a qualquer préfeixe étale em X.

Para definir feixe étale precisamos da noção de cobertura étale e de um análogo para a intersecção de abertos em $\mathbf{Et}(X)$.

- A uma familia de abertos étale $\{U_i \xrightarrow{p_i} X\}_{i\in I}$ tal que

  $$X = \bigcup_{i\in I} p_i(U_i)$$

  chamamos uma *cobertura aberta étale* de X.

- Por outro lado, considere-se um préfeixe étale $\mathscr{F}$ em X e sejam $U \xrightarrow{u} X$ um aberto étale de X e $\{U_i \xrightarrow{p_i} U\}_{i\in I}$ uma cobertura aberta étale de U. Então, para cada $i \in I$, temos um aberto étale $U \to X$ obtido por composição. Para cada $i \in I$, seja $s_i \in \mathscr{F}(U_i \to X)$ e suponhamos que

  $$\rho_{U_i, U_i \times_U U_j}(s_i) = \rho_{U_j, U_i \times_U U_j}(s_j)$$

para todos $i, j \in I$; para quaisquer $i, j \in I$, o produto fibrado $U_i \times_U U_j$ é um aberto étale em X (que é o análogo étale da intersecção de abertos). Nesta situação, dizemos que a família $\{s_i\}_{i\in I}$ satisfaz a *condição de colagem*.

Definição. Dizemos que $\mathscr{F}$ é um *feixe étale* em X (ou, simplesmente, um *feixe* em $\mathbf{Et}(X)$) se, para qualquer aberto étale $U \to X$ de X, qualquer cobertura aberta étale finita $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ de U e qualquer família $\{s_i\}_{i\in I}$, $s_i \in \mathscr{F}(U_i \to X)$, que satisfaz a condição de colagem existir um e um só $s \in \mathscr{F}(U \to X)$ tal que $s_i = \rho_{U,U_i}(s)$.

A colecção dos feixes de grupos abelianos sobre $\mathbf{Et}(X)$ constituem os objectos de uma categoria, que denotaremos por $\mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(X)$, em que os morfismos são os morfismos de feixes étale. Se $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ forem objectos de $\mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(X)$, denotaremos por

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(X)}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$$

o conjunto dos morfismos $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$. A categoria $\mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(X)$ é abeliana. Se R for um anel comutativo e com identidade, podemos definir de modo análogo a categoria dos feixes de R-módulos em $\mathbf{Et}(X)$ que denotaremos por $\mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(X, R)$. é claro que $\mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(X) = \mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Z})$.

Definição. Para qualquer préfeixe $\mathscr{F}$ em $\mathbf{Et}(X)$, existem um feixe $\mathscr{F}^+$ em $\mathbf{Et}(X)$ e um morfismo de préfeixes $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ tais que, para todo o feixe $\mathscr{G}$ e todo o morfismo $\psi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, existe um único morfismo $\theta\colon \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ tal que: $\psi = \theta \circ \varphi$. Ao feixe $\mathscr{F}^+$, que é único a menos de isomorfismo, chamamos a *feixificação (étale)* do préfeixe $\mathscr{F}$.

Para definirmos os germes num ponto, precisamos de generalizar a noção de vizinhança aberta. Começamos por encarar os pontos de um esquema de uma forma diferente.

- Definimos um *ponto geométrico* de X como sendo um morfismo de esquemas $\mathrm{Spec}(\mathbb{K}) \to X$ em que $\mathbb{K}$ é um corpo algébricamente fechado. Chamamos *centro* de um ponto geométrico $\mathrm{Spec}(\mathbb{K}) \to X$ à imagem $x \in X$ do único elemento de $\mathrm{Spec}(\mathbb{K})$.

- Denotando por $\bar{x}$ o ponto geométrico $\mathrm{Spec}(\mathbb{K}) \to X$ que tem centro $x \in X$, definimos *vizinhança étale* de $\bar{x}$ como sendo um triângulo comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\mathbb{K}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{x}"'] & U \arrow[dl] \\ X & \end{tikzcd}$$

onde $U \to X$ é um aberto étale de X.

Definição. Para qualquer ponto geométrico $\bar{x}$ de X, definimos o *germe* $\mathscr{F}_{\bar{x}}$ de um feixe $\mathscr{F}$ em $\mathbf{Et}(X)$ como sendo o limite directo

$$\mathscr{F}_{\bar{x}} = \varinjlim \mathscr{F}(U \to X)$$

tomado sobre todas as vizinhanças étale $U \to X$ de $\bar{x}$.

De seguida, definimos as imagens directa e inversa de um feixe étale.

Definição. Dados um morfismo de esquemas $\phi\colon X \to Y$ e um feixe $\mathscr{F}$ em $\mathbf{Et}(X)$, definimos a *imagem directa* $\phi_*\mathscr{F}$ como sendo o feixe em $\mathbf{Et}(Y)$ dado por

$$\phi_*\mathscr{F}(U \to Y) = \mathscr{F}(X \times_Y U \to X)$$

para qualquer aberto étale $U \to Y$ de Y.

No caso em que U é um subconjunto aberto de Y, temos que $X \times_Y U \simeq \phi^{-1}(U)$ e, portanto, esta noção de imagem directa é a extensão da noção no caso clássico.

Para a noção de imagem inversa, que será também um análogo da teoria clássica, precisamos de uma noção análoga à de inclusão num aberto.

Dados um morfismo de esquemas $\phi\colon X \to Y$ e qualquer aberto étale $U \to X$ em $\mathbf{Et}(X)$, denotamos por $\mathcal{V}(U)$ o conjunto de todos os abertos étale $V \to Y$ em $\mathbf{Et}(Y)$ para os quais existe um morfismo $U \to V$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\phi"] \\ V \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Definição. Dado um feixe $\mathscr{G}$ em $\mathbf{Et}(Y)$, definimos a *imagem inversa* $\phi^*\mathscr{G}$ como sendo a feixificação do préfeixe $\mathrm{pre}(\phi^*\mathscr{G})$ em $\mathbf{Et}(X)$ dado por

$$\mathrm{pre}(\phi^*\mathscr{G})(U \to X) = \varprojlim_{V \in \mathcal{V}(U)} \mathscr{G}(V \to Y)$$

para qualquer aberto étale $U \to X$ de X.

Para qualquer ponto geométrico $\bar{x}\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{K}) \to X$ de X, a composição $\phi \circ \bar{x}\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{K}) \to Y$ é um ponto geométrico de Y e temos

$$(\phi^*\mathscr{G})_{\bar{x}} = \mathscr{G}_{\phi\circ\bar{x}}.$$

Tal como no caso clássico, o functor $\mathscr{G} \mapsto \phi^*\mathscr{G}$ é adjunto à esquerda do functor $\mathscr{F} \mapsto \phi_*\mathscr{F}$, isto é, existe uma bijecção

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(X)}(\phi^*\mathscr{G}, \mathscr{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(Y)}(\mathscr{G}, \phi_*\mathscr{F})$$

para quaisquer feixes $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(X)$ e $\mathscr{G} \in \mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(Y)$.

Há também a possibilidade de definir imagens directa e inversa próprias.

Definição. • Para qualquer feixe $\mathscr{F}$ em $\mathbf{Et}(X)$, a *imagem directa própria* $\phi_!\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ é o feixe em $\mathbf{Et}(Y)$ univocamente determinado (a menos de isomorfismo) pela propriedade de que o functor $\mathscr{F} \to \phi_!\mathscr{F}$ é adjunto à esquerda do functor $\mathscr{G} \to \phi^*\mathscr{G}$, isto é, existe uma bijecção

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(Y)}(\phi_!\mathscr{F}, \mathscr{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(X)}(\mathscr{F}, \phi^*\mathscr{G})$$

para quaisquer feixes $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(X)$ e $\mathscr{G} \in \mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(Y)$. Prova-se que existe um morfismo injectivo

$$\phi_!\mathscr{F} \to \phi_*\mathscr{F},$$

que é um isomorfismo no caso em que ϕ é um morfismo próprio.

- Para qualquer feixe $\mathscr{F}$ em $\mathbf{Et}(X)$, a *imagem inversa própria* $\phi^!\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ é o feixe em $\mathbf{Et}(Y)$ univocamente determinado (a menos de isomorfismo) pela propriedade de que o functor $\phi^!$ é adjunto à direita do functor $\phi_!$, isto é, existe uma bijecção

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(X)}(\phi^!\mathscr{F}, \mathscr{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(Y)}(\mathscr{F}, \phi_!\mathscr{G})$$

para quaisquer feixes $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(X)$ e $\mathscr{G} \in \mathbf{Sh}_{\mathrm{et}}(Y)$. No caso em que ϕ é um morfismo étale, temos $\phi^! = \phi^*$.

Definimos também feixes (étale) constantes, localmente constantes e construtíveis em $\mathbf{Et}(X)$.

Definição. Dizemos que um feixe $\mathscr{F}$ em $\mathbf{Et}(X)$ é:

- um *feixe constante* se for a feixificação $(\mathscr{F}_0)^+$ de algum préfeixe $\mathscr{F}_0$ em que $\mathscr{F}_0(U) = \mathscr{F}_0(V)$ para quaisquer abertos étale $U, V \in \mathbf{Et}(X)$.

- um *sistema local* (ou, um *feixe localmente constante*) se existir uma cobertura étale finita $\{U_i \xrightarrow{p_i} X\}_{i\in I}$ de X tal que, para qualquer $i \in I$, a imagem inversa ${p_i}^*\mathscr{F}$ é um feixe constante.

- um *feixe construtível* se X for uma união disjunta de subconjuntos localmente fechados $\{X_j\}_{j\in J}$ de modo que, para qualquer $j \in J$, a inclusão $i_j\colon X_j \to X$ determina um sistema local ${i_j}^*\mathscr{F}$ em $\mathbf{Et}(X_j)$.

2.4 Feixes ℓ-ádicos

Nesta secção, consideramos um esquema X que supomos separado e de tipo finito sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$. Todos os feixes sobre X são feixes étale em $\mathbf{Et}(X)$.

Fixamos um primo ℓ e consideramos o anel $\mathbb{Z}_\ell$ dos inteiros ℓ-ádicos. Por definição, $\mathbb{Z}_\ell$ é o limite inverso do sistema (inverso)

$$\cdots \to \mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \to \cdots \mathbb{Z}/\ell^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}.$$

$\mathbb{Z}_\ell$ é um domínio de valorização discreta, em que $\ell\mathbb{Z}_\ell$ é o único ideal maximal. O corpo residual $\mathbb{Z}_\ell/\ell\mathbb{Z}_\ell$ é isomorfo ao corpo finito $\mathbb{F}_\ell$. Denotamos por $\mathbb{Q}_\ell$ o corpo dos números ℓ-ádicos, isto é, o corpo dos quocientes de $\mathbb{Z}_\ell$. Além disso, escolhemos um fecho algébrico $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$ e consideramos corpos $\mathbb{Q}_\ell \subseteq E \subseteq \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ para os quais a extensão $\mathbb{Q}_\ell \subseteq E$ é finita. Denotamos por R_E o anel dos inteiros (algébricos) de E. Tal como $\mathbb{Z}_\ell$, R_E é um domínio de valorização discreta (e, em particular, um domínio de ideais principais). Denotamos por $\mathfrak{m}_E$ o único ideal maximal de R_E e escolhemos $\pi \in \mathfrak{m}_E$ tal que $\mathfrak{m}_E = \pi R_E$ (π diz-se um *uniformizador* de E). Os quocientes $R_E/\pi^{n+1}R_E$ são anéis finitos e $R_E/\pi R_E = R_E/\mathfrak{m}_E$ é um corpo finito de característica ℓ.

Para simplificar, pomos $R = R_E$ e $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_E$. Um $(R/\pi^n R)$-módulo é um R-módulo M tal que $\pi^n M = 0$. Por exemplo, $R/\pi^n R$ é um $(R/\pi^n R)$-módulo. Qualquer $(R/\pi^n R)$-módulo tem uma estrutura natural de $(R/\pi^{n+1}R)$-módulo (porque $\pi^n M = 0$ implica $\pi^{n+1}M = 0$). Em particular, $R/\pi^n R$-módulo pode ser considerado um $(R/\pi^{n+1}R)$-módulo. Por outro lado, dado qualquer $(R/\pi^{n+1}R)$-módulo N, podemos construir o $(R/\pi^n R)$-módulo

$$N' = N \otimes_{R/\pi^{n+1}R} (R/\pi^n R).$$

De forma análoga, qualquer feixe étale $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}(X)$ de $(R/\pi^{n+1}R)$-módulos (sobre o esquema X), podemos construir um feixe étale $\mathscr{F}'$ de $(R/\pi^n R)$-módulos definindo

$$\mathscr{F}'(U \to X) = \mathscr{F}(U \to X) \otimes_{R/\pi^{n+1}R} (R/\pi^n R)$$

para qualquer aberto étale $U \to X$. Denotamos este feixe por

$$\mathscr{F} \otimes_{R/\pi^{n+1}R} (R/\pi^n R).$$

Existe um morfismo natural

$$\mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes_{R/\pi^{n+1}R} (R/\pi^n R).$$

Definição. Um *feixe π-ádico* (no esquema X) é um sistema inverso

$$\cdots \to \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_{n-1} \to \cdots \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_0$$

onde $\mathscr{F}_n$ é um feixe construtível de $(R/\pi^{n+1}R)$-módulos e existem isomorfismos

$$\mathscr{F}_{n-1} \simeq \mathscr{F}_n \otimes_{R/\pi^{n+1}R} (R/\pi^n R)$$

tais que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathscr{F}_n \otimes_{R/\pi^{n+1}R} (R/\pi^n R) \arrow[dl] \\
& \mathscr{F}_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

são comutativos.

Definição. Um *sistema local π-ádico* $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ é um feixe π-ádico em que cada $\mathscr{F}_n$ é um sistema local. Como exemplo, se M for um R-módulo finitamente gerado e $\mathscr{F}_n \equiv M/\pi^{n+1}M$ for o sistema local associado a $M/\pi^{n+1}M$, então $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ é um feixe π-ádico.

Outros exemplo são os seguintes:

- Se $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ e $\mathscr{G} = (\mathscr{G}_n)_{n\geq 0}$ forem feixes π-ádicos, então

  $$\mathscr{F} \otimes_R \mathscr{G} = (\mathscr{F}_n \otimes_{R/\pi^{n+1}R} \mathscr{G}_n)_{n\geq 0}$$

  é um feixe π-ádico.

- Se $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ for um feixe π-ádico, então

  $$\phi^* \mathscr{F} = (\phi^* \mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$$

  também é um feixe π-ádico para qualquer morfismo de esquemas f.

Definição. Se $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ for um feixe π-ádico e $\bar{x}\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{K}) \to X$ for um ponto geométrico, então $(\mathscr{F}_{n,\bar{x}})_{n\geq 0}$ é um sistema inverso. Definimos o germe $\mathscr{F}_{\bar{x}}$ de $\mathscr{F}$ em $\bar{x}$ como sendo

$$\mathscr{F}_{\bar{x}} = \varprojlim_n \mathscr{F}_{n,\bar{x}}.$$

Dado um feixe π-ádico $\mathscr{F}$, podemos formar as suas translações $\mathscr{F}[k]$ para $k \geq 0$, pondo $(\mathscr{F}[k])_n = \mathscr{F}_{k+n}$. Por um *feixe π-ádico de Artin-Rees* entendemos um sistema inverso

$$\cdots \to \mathscr{G}_n \to \mathscr{G}_{n-1} \to \cdots \to \mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_0$$

para o qual existe um feixe π-ádico $\mathscr{F}$ e um morfismo $\mathscr{F}[k] \to \mathscr{G}$ cujos núcleo e imagem são sistemas nulos. Aqui, usamos as noções seguintes:

- Um morfismo de sistemas inversos $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0} \to (\mathscr{G}_n)_{n\geq 0}$ é uma família $(\phi_n)_{n\geq 0}$ em que $\phi_n \colon \mathscr{F}_n \to \mathscr{G}_n$ é um morfismo de feixes e, para cada $n \geq 1$, o diagrama
$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_n \arrow[r] \arrow[d, "\phi_n"'] & \mathscr{F}_{n-1} \arrow[d, "\phi_{n-1}"] \\ \mathscr{G}_n \arrow[r] & \mathscr{G}_{n-1} \end{tikzcd}$$
é comutativo.

- Um *sistema nulo* é um sistema inverso $\mathscr{F}$ tal que, para qualquer k, o morfismo $\mathscr{F}[k] \to \mathscr{F}$ é nulo para k suficientemente grande.

- o núcleo e a imagem de um morfismo de sistemas inversos são definidos da maneira usual.

A categoria $\mathbf{Sh}_{\mathrm{AR}}(X, R)$ dos feixes π-ádicos de Artin-Rees é uma categoria abeliana. De facto, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_{\mathrm{AR}}(X,R)}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ é um R-módulo e os morfismos definidos por multiplicação por π^n formam um sistema multiplicativo. Assim, é possível construir uma categoria, que denotamos por $\mathbf{Sh}(X, E)$, em que os objectos são os feixes π-ádicos de Artin-Rees e onde, para quaisquer objectos $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathbf{Sh}(X, E)$, o conjunto $\mathrm{Hom}_E(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ dos morfismos $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ é definido por

$$\mathrm{Hom}_E(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_{\mathrm{AR}}(X,R)}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_R E.$$

Deste modo, a categoria $\mathbf{Sh}(X, E)$ é abeliana e, nesta categoria, as multiplicações por π^n são isomorfismos.

Definição.

- Chamamos *E-feixe* a qualquer objecto $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}(X, E)$.

- Dizemos que um E-feixe é um *E-sistema local* se for isomorfo a um sistema local π-ádico na categoria dos E-feixes.

- Se um E-feixe $\mathscr{F}$ for representado por um feixe π-ádico $\mathscr{F}'$ e $\bar{x}$ for um ponto geométrico de X, definimos o germe $\mathscr{F}_{\bar{x}}$ de $\mathscr{F}$ em $\bar{x}$ como sendo
$$\mathscr{F}_{\bar{x}} = \mathscr{F}'_{\bar{x}} \otimes_R E.$$

Seja agora $E \subseteq F \subseteq \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ um corpo tal que $E \subseteq F$ é uma extensão finita e seja $\rho \in R_F$ tal que $\mathfrak{m}_F = \rho R_F$. Pela Teoria dos Números Algébricos, sabe-se que existe $e \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho^{n+1} R_F \cap R_E = \pi^i R_E, \quad ie < n+1 \leq (i+1)e.$$

Para qualquer feixe π-ádico $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$, definimos um feixe ρ-ádico $\mathscr{G} = (\mathscr{G}_n)_{n\geq 0}$ por

$$\mathscr{G}_n = \mathscr{F}_i \otimes_{R_E/\pi^{i+1}R_E} (R_F/\rho^{n+1}R_F).$$

Denotando este feixe por $\mathscr{F} \otimes_{R_E} R_F$, a correspondência

$$\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F} \otimes_{R_E} R_F$$

define um functor da categoria dos feixes π-ádicos para a categoria dos feixes ρ-ádicos, que induz um functor da categoria dos E-feixes para a categoria dos F-feixes e que é dada pela correspondência

$$\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F} \otimes_E F.$$

Finalmente, definimos o categoria $\mathbf{Sh}(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ dos $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-feixes em X como se segue. Um objecto em $\mathbf{Sh}(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ é um objecto $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}(X, E)$ para algum corpo $\mathbb{Q}_\ell \subseteq E \subseteq \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ como acima; representamos este objecto em $\mathbf{Sh}(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ por $\mathscr{F} \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Por outro lado, dados objectos $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}(X, E)$ e $\mathscr{G} \in \mathbf{Sh}(X, F)$, definimos

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathscr{F} \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_\ell, \mathscr{G} \otimes_F \bar{\mathbb{Q}}_\ell) = \varinjlim_{E'} \mathrm{Hom}_{E'}(\mathscr{F} \otimes_E E', \mathscr{F} \otimes_F E')$$

onde o limite é sobre todos os corpos $\mathbb{Q}_\ell \subseteq E' \subseteq \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ tais que $\mathbb{Q}_\ell \subseteq E'$ é uma extensão finita e $E, F \subseteq E'$.

Definição.

- Chamamos $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-*feixe* a qualquer objecto $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$.
- Dizemos que um $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-feixe é um $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-*sistema local* se for representado por um E-sistema local para algum subcorpo $E \subseteq \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ como acima.
- Se um $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-feixe $\mathscr{F}$ for representado por um E-feixe $\mathscr{F}'$ e $\bar{x}$ for um ponto geométrico, definimos o germe $\mathscr{F}_{\bar{x}}$ de $\mathscr{F}$ em $\bar{x}$ como sendo

$$\mathscr{F}_{\bar{x}} = \mathscr{F}'_{\bar{x}} \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_\ell.$$

2.5 Categoria derivada dos feixes

Para os nossos propósitos, é mais conveniente usar complexos de feixes do que apenas feixes.

Como antes, consideramos um esquema X que supomos ser separado e de tipo finito sobre um corpo algebricamente fechado. Denotamos por $\mathbf{K}(X)$ a categoria em que os objectos são os complexos

$$\mathscr{F}\colon \cdots \to \mathscr{F}^{n-1} \to \mathscr{F}^{n} \to \mathscr{F}^{n+1} \to \cdots$$

de feixes de grupos abelianos em $\mathbf{Et}(X)$ e em que os morfismos são as classes homotópicas de morfismos de complexos. Dizemos que um complexo $\mathscr{F}$ em $\mathbf{K}(X)$ é *limitado* se existirem $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathscr{F}^n = 0$ para todo $n \leq n_1$ e todo $n \geq n_2$. Denotamos por $\mathbf{K}^b(X)$ a subcategoria completa de $\mathbf{K}(X)$ cujos objectos são os complexos limitados de $\mathbf{K}(X)$.

Definição. A *categoria derivada (limitada)* $\mathbf{D}^b(X)$ é a categoria cujos objectos são os mesmos de $\mathbf{K}(X)$ e em que os morfismos $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ são definidos por

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(X)}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \varinjlim_{\mathscr{H}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(X)}(\mathscr{F}, \mathscr{H})$$

onde o limite é tomado sobre todos os quasi-isomorfismos $\mathscr{G} \to \mathscr{H}$ em $\mathbf{K}(X)$.

Um *quasi-isomorfismo* é um morfismo de complexos que induz um isomorfismo em todos os feixes cohomológicos.

Definição. Se

$$\mathscr{F}\colon \cdots \to \mathscr{F}^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} \mathscr{F}^{n} \xrightarrow{d^n} \mathscr{F}^{n+1} \to \cdots$$

for um complexo em $\mathbf{K}(X)$, para qualquer $i \in \mathbb{Z}$, definimos o *i-ésimo feixe cohomológico* $\mathscr{H}^i(\mathscr{F})$ de $\mathscr{F}$ como sendo o feixe-quociente

$$\mathscr{H}^i(\mathscr{F}) = \mathrm{Ker}(d^i)/\mathrm{Im}(d^{i-1}).$$

Qualquer morfismo de complexos $\phi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ induz um morfismo de feixes $\mathscr{H}^i(\phi)\colon \mathscr{H}^i(\mathscr{F}) \to \mathscr{H}^i(\mathscr{G})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Um feixe $\mathscr{F} \in \mathbf{Sh}(X)$ determina o complexo $\cdots \to 0 \to \mathscr{F} \to 0 \to \cdots$ em que a 0-ésima componente é X. Denotando este complexo também por $\mathscr{F}$, obtemos um functor

$$\mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{D}^b(X), \quad \mathscr{F} \to \mathscr{F},$$

que é, de facto, uma equivalência entre $\mathbf{Sh}(X)$ e a subcategoria completa de $\mathbf{D}^b(X)$ cujos objectos são os complexos $\mathscr{F}$ tais que o feixe cohomológico $\mathscr{H}^i(\mathscr{F})$ é nulo para todo $i \neq 0$.

Definição. Definimos $\mathbf{D}_c^b(X)$ como sendo a subcategoria completa de $\mathbf{D}^b(X)$ cujos objectos são os complexos $\mathscr{F} \in \mathbf{D}^b(X)$ para os quais todos os feixes cohomológicos $\mathscr{H}^i(\mathscr{F})$, $i \in \mathbb{Z}$, são construtíveis.

Se R for um anel comutativo e com identidade, denotaremos por $\mathbf{D}^b(X, R)$ e $\mathbf{D}_c^b(X, R)$ as categorias derivadas definidas como acima considerando feixes de R-módulos em vez de grupos abelianos.

Se $\mathbb{Q}_\ell \subseteq E \subseteq \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ for um corpo tal que a extensão $\mathbb{Q}_\ell \subseteq E$ é finita, definimos $\mathbf{D}_c^b(X, E)$ como sendo a categoria em que os objectos são os objectos de $\mathbf{D}_c^b(X, R_E)$, onde R_E denota o anel dos inteiros de E, e em que, para quaisquer $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathbf{D}_c^b(X, E)$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_c^b(X,E)}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_c^b(X,R)}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_R E.$$

De seguida, damos uma ideia de como é definida a categoria $\mathbf{D}_c^b(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Suponhamos que $\mathbb{Q}_\ell \subseteq E \subseteq F \subseteq \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ são corpos e que a extensão $\mathbb{Q}_\ell \subseteq F$ também é finita. Para qualquer objecto $\mathscr{F} \in \mathbf{D}_c^b(X, E)$, é possível definir um objecto

$$\mathscr{F} \otimes^{\mathrm{L}} F \in \mathbf{D}_c^b(X, F)$$

de modo a obter um functor de transição $\mathbf{D}_c^b(X, E) \to \mathbf{D}_c^b(X, F)$. Então, definimos a categoria $\mathbf{D}_c^b(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ como o limite directo das categorias $\mathbf{D}_c^b(X, E)$ quando E percorre a família de todas as extensões finitas de $\mathbb{Q}_\ell$ que estão contidas em $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Assim, um objecto em $\mathbf{D}_c^b(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ é representado por um objecto em $\mathbf{D}_c^b(X, E)$ para alguma dessas extensões E. Por outro lado, dados objectos $\mathscr{F} \in \mathbf{D}_c^b(X, E)$ e $\mathscr{G} \in \mathbf{D}_c^b(X, F)$ (que representam objectos em $\mathbf{D}_c^b(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$), definimos

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_c^b(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \varinjlim_{E'} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_c^b(X,E')}(\mathscr{F} \otimes^{\mathrm{L}} E', \mathscr{F} \otimes^{\mathrm{L}} E')$$

onde o limite é sobre todos os corpos $\mathbb{Q}_\ell \subseteq E' \subseteq \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ tais que $\mathbb{Q}_\ell \subseteq E'$ é uma extensão finita e $E, F \subseteq E'$.

Para terminar, referimos os seis functores de Grothendieck. Supomos que $\Bbbk$ é um corpo finito, que X e Y são $\Bbbk$-esquemas (separados e de tipo finito sobre o fecho algébrico de $\Bbbk$) e que $\phi\colon X \to Y$ é um morfismo étale. Então, existem seis functores:

$$R\phi_*\colon \mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathbf{D}^b_c(Y,\bar{\mathbb{Q}}_\ell),$$
$$R\phi_!\colon \mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathbf{D}^b_c(Y,\bar{\mathbb{Q}}_\ell),$$
$$\phi^*\colon \mathbf{D}^b_c(Y,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell),$$
$$R\phi^!\colon \mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell),$$
$$-\otimes^{\mathrm{L}} -\colon \mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \times \mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell),$$
$$R\mathrm{Hom}(-,-)\colon \mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \times \mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell),$$

que, como acimas, são definidos usando extensões finitas de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ contidas em $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$.

Por exemplo, se um feixe em $\mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ for representado por $\mathscr{F} \in \mathbf{D}^b_c(X,E)$ onde $E \subseteq \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ é uma extensão finita de $\mathbb{Q}_\ell$, então $\mathscr{F}$ é um objecto em $\mathbf{D}^b_c(X,R_E)$ e podemos definir (de maneira natural) o functor derivado à direita

$$R\phi_*\colon \mathbf{D}^b_c(X,R_E) \to \mathbf{D}^b_c(Y,R_E).$$

Este functor associa ao objecto $\mathscr{F}$ o complexo $R\phi_*\mathscr{F} = (\mathscr{H}^n(R\phi_*\mathscr{F}))_{n\in\mathbb{Z}}$ que representa um objecto em $\mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ pelo processo indicado acima.

O functor $\mathscr{G} \mapsto \phi^*\mathscr{G}$ é adjunto à esquerda do functor $\mathscr{F} \mapsto R\phi_*\mathscr{F}$ e, portanto, existe uma bijecção

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)}(\phi^*\mathscr{G},\mathscr{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b_c(Y,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)}(\mathscr{G},\phi_*\mathscr{F})$$

para quaisquer $\mathscr{F} \in \mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ e $\mathscr{G} \in \mathbf{D}^b_c(Y,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$. Analogamente, o functor $\mathscr{G} \mapsto \phi^!\mathscr{G}$ é adjunto à esquerda do functor $\mathscr{F} \mapsto R\phi_!\mathscr{F}$ e, portanto, existe uma bijecção

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)}(\phi^!\mathscr{G},\mathscr{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b_c(Y,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)}(\mathscr{G},\phi_!\mathscr{F})$$

para quaisquer $\mathscr{F} \in \mathbf{D}^b_c(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ e $\mathscr{G} \in \mathbf{D}^b_c(Y,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Para simplificar, de agora em diante, omitiremos o “R” e o “L” nestes functores, escrevendo apenas ϕ_*, $\phi_!$, ϕ^*, $\phi^!$, $\otimes$ e Hom.

Capítulo 3

Os grupos algébricos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{G}$

3.1 Grupos algébricos

Seja $\Bbbk$ um corpo.

Definição. Dizemos que um $\Bbbk$-esquema G, com morfismo de estrutura $\lambda\colon G \to \operatorname{Spec}(\Bbbk)$, é um *esquema-grupo sobre* $\Bbbk$ (ou, um $\Bbbk$-*esquema-grupo*) se existirem morfismos de $\Bbbk$-esquemas

$$\mu\colon G \times_{\Bbbk} G \to G, \quad \iota\colon G \to G \quad \text{e} \quad \varepsilon\colon \operatorname{Spec}(\Bbbk) \to G$$

de modo a que as propriedades seguintes sejam satisfeitas:

- Associatividade: $\mu \circ (\mathrm{id} \times \mu) = \mu \circ (\mu \times \mathrm{id})$, isto é, o diagrama

  $$\begin{tikzcd} G \times_{\Bbbk} G \times_{\Bbbk} G \arrow[r, "\mathrm{id}\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times\mathrm{id}"'] & G \times_{\Bbbk} G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times_{\Bbbk} G \arrow[r, "\mu"'] & G \end{tikzcd}$$

  é comutativo.

- Inversão: $\mu \circ (\iota, \mathrm{id}) = \lambda \circ \varepsilon$, isto é, o diagrama

  $$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(\iota,\mathrm{id})"] \arrow[d, "\lambda"'] & G \times_{\Bbbk} G \arrow[d, "\mu"] \\ \operatorname{Spec}(\Bbbk) \arrow[r, "\varepsilon"'] & G \end{tikzcd}$$

  é comutativo.

- Identidade: $\mu \circ (\varepsilon \times \mathrm{id}) = \mathrm{id} \circ \mathrm{pr}_2$, isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\Bbbk) \times_{\Bbbk} G \arrow[r, "\varepsilon\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] & G \times_{\Bbbk} G \arrow[d, "\mu"] \\ G \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & G \end{tikzcd}$$

  é comutativo; aqui, $\mathrm{pr}_2 \colon \mathrm{Spec}(\Bbbk) \times_{\Bbbk} G \to G$ denota a projecção em G.

Por outras palavras, $(G, \mu, \iota, \varepsilon)$ é um grupo com respeito à multiplicação μ, à inversão ι e com identidade ε.

Definição. Diremos que um $\Bbbk$-esquema-grupo $G = (G, \mu, \iota, \varepsilon)$ é *comutativo* se o diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times_{\Bbbk} G \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\mu"'] & & G \times_{\Bbbk} G \arrow[dl, "\mu"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

onde $\sigma \colon G \times_{\Bbbk} G \to G \times_{\Bbbk} G$ é o $\Bbbk$-morfismo definido por $\sigma(x, y) = (y, x)$ para todos $x, y \in G$, for comutativo (isto é, se $\mu \circ \sigma = \mu$).

No caso em que G é uma $\Bbbk$-variedade algébrica (isto é, o $\Bbbk$-esquema G é reduzido, separado e de tipo finito), dizemos que $(G, \mu, \iota, \varepsilon)$ é um *grupo algébrico (definido) sobre* $\Bbbk$.

Denotemos por $\mathbf{AffSch}_{\Bbbk}$ a categoria dos $\Bbbk$-esquemas afins (com os morfismos de $\Bbbk$-esquemas). Suponhamos agora que R é um anel comutativo com identidade e que $\mathrm{Spec}(R)$ é um $\Bbbk$-esquema. Se $\lambda \colon \mathrm{Spec}(R) \to \Bbbk$ for o morfismo de estrutura, então R é uma $\Bbbk$-álgebra (comutativa) com morfismo de estrutura $\lambda^* \colon \Bbbk \to R$ (o comorfismo associado a λ).

As correspondências $\mathrm{Spec}(R) \mapsto R$ e $\phi \mapsto \phi^*$ definem um functor contravariante da categoria $\mathbf{AffSch}_{\Bbbk}$ para a categoria das $\Bbbk$-álgebras comutativas e com identidade. Com efeito, este functor define uma anti-equivalência entre estas duas categorias. Em particular, para quaisquer $\Bbbk$-álgebras comutativas com identidade R e R', existe uma bijecção

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(R, R') \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{Spec}(R'), \mathrm{Spec}(R))$$

entre os respectivos conjuntos de morfismos (trata-se de facto de um morfismo de grupos abelianos).

Quando $G = \mathrm{Spec}(R)$ é um $\Bbbk$-esquema-grupo com morfismo de estrutura $\lambda \colon \mathrm{Spec}(R) \to \Bbbk$, os $\Bbbk$-morfismos $\mu \colon \mathrm{Spec}(R) \times_{\Bbbk} \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(R)$,

$\iota\colon \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(R)$ e $\varepsilon\colon \mathrm{Spec}(\Bbbk) \to \mathrm{Spec}(R)$ correspondem, por meio do functor acima, a homomorfimos de $\Bbbk$-álgebras

$$\mu^*\colon R \to R \otimes_{\Bbbk} R, \quad \iota^*\colon R \to R \quad \text{e} \quad \varepsilon^*\colon R \to \Bbbk;$$

relembremos que $\mathrm{Spec}(R) \times_{\Bbbk} \mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(R \otimes_{\Bbbk} R)$. Além disso, os axiomas de esquema-grupo são equivalentes a exigir que:

- o diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d, "\mu^*"'] & R \otimes_{\Bbbk} R \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu^*"] \\ R \otimes_{\Bbbk} R \arrow[r, "\mu^*\otimes\mathrm{id}"'] & R \otimes_{\Bbbk} R \otimes_{\Bbbk} R \end{tikzcd}$$

  é comutativo;

- o diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d, "\varepsilon^*"'] & R \otimes_{\Bbbk} R \arrow[d, "\iota^*\otimes\mathrm{id}"] \\ \Bbbk \arrow[r, "\lambda^*"'] & R \end{tikzcd}$$

  é comutativo;

- o diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & R \otimes_{\Bbbk} R \arrow[d, "\varepsilon^*\otimes\mathrm{id}"] \\ R \arrow[r, "(\varepsilon^*{,}\mathrm{id})"'] & \Bbbk \otimes_{\Bbbk} R \end{tikzcd}$$

  é comutativo.

Isto significa que a $\Bbbk$-álgebra (comutativa e com identidade) R tem uma estrutura de álgebra de Hopf comutativa (com co-multiplicação μ^*, co-identidade ε^* e antípoda ι^*).

3.2 Grupos-álgebra como grupos algébricos

De importância especial, é o anel polinomial $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ dos polinómios com coeficientes em $\Bbbk$ em n indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$; para simplificar, escrevemos $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $\Bbbk[\mathbf{x}] = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Nesta situação, introduzimos em $\mathrm{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$ uma estrutura de grupo algébrico afim sobre $\Bbbk$ definindo os morfismos μ, ι e ε da maneira que se segue:

- $\mu^*\colon \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{x}] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[\mathbf{x}]$ é o único morfismo de $\Bbbk$-álgebras que satisfaz
$$\mu^*(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i, \quad 1 \leq i \leq n;$$
- $\iota^*\colon \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{x}]$ é o único morfismo de $\Bbbk$-álgebras que satisfaz
$$\iota^*(x_i) = -x_i, \quad 1 \leq i \leq n;$$
- $\varepsilon^*\colon \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk$ é o morfismo nulo.

Não é difícil verificar que:

Proposição 3.2.1. *Na notação anterior,* $\mathcal{A} = (\mathrm{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}]), \mu, \iota, \varepsilon)$ *é um grupo algébrico sobre* $\Bbbk$*. Além disso,* $\mathcal{A}$ *é comutativo.*

(Notemos que o esquema $\mathrm{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$ é reduzido, separado e de tipo finito, como resulta facilmente das propriedades da $\Bbbk$-álgebra $\Bbbk[\mathbf{x}]$.)

Se G for um grupo algébrico sobre $\Bbbk$ e T for um $\Bbbk$-esquema, definimos
$$G(T) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(T, G),$$
isto é, a T associamos o conjunto dos morfismos de $\Bbbk$-esquemas $T \to G$; de facto, $G(T)$ é um grupo abeliano. (A correspondência $T \mapsto G(T)$ define um functor da categoria $\mathbf{Sch}_{\Bbbk}$ dos $\Bbbk$-esquemas (com os morfismos de $\Bbbk$-esquemas) para a categoria $\mathbf{Set}$ dos conjuntos, que é conhecido por *functor dos pontos*.)

No caso em que $T = \mathrm{Spec}(R)$ é um $\Bbbk$-esquema afim, denotamos a imagem $G(T)$ simplesmente por $G(R)$. Em particular, podemos considerar o $\Bbbk$-esquema $\mathrm{Spec}(\Bbbk)$ e o grupo $G(\Bbbk)$. Este conjunto está em bijecção com o conjunto dos *pontos* $\Bbbk$*-racionais* do $\Bbbk$-esquema G, isto é, com os pontos $x \in G$ tais que
$$\mathscr{O}_{G,x}/\mathfrak{m}_x \simeq \Bbbk$$
onde $\mathfrak{m}_x$ denota o (único) ideal maximal do anel local $\mathscr{O}_{G,x}$.

Em particular, se $\mathbb{K} = \bar{\Bbbk}$ for o fecho algébrico de $\Bbbk$, temos uma identificação natural de $G(\mathbb{K})$ com o conjunto dos pontos fechados do $\mathbb{K}$-esquema $\bar{G} = G \times_{\Bbbk} \mathbb{K}$. Se, além disso, $G = \mathrm{Spec}(R)$ for um grupo algébrico afim sobre $\Bbbk$ (assim, R é uma $\Bbbk$-álgebra comutativa com identidade), então
$$G(\Bbbk) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{Spec}(\Bbbk), \mathrm{Spec}(R)) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(R, \Bbbk).$$

Quando $R = \Bbbk[\mathbf{x}]$, obtemos
$$G(\Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], \Bbbk),$$
pelo que podemos identificar $G(\Bbbk)$ com os morfismos de $\Bbbk$-álgebras $\Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk$. Estes morfismos são definidos pelas imagens das indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$ e, portanto, correspondem a funções polinomiais definidas em $\Bbbk^n$.

De seguida, consideramos uma $\Bbbk$-álgebra nilpotente A de dimensão finita n e fixamos uma $\Bbbk$-base $(e_1, \dots, e_n)$ de A. Para qualquer anel comutativo e com identidade R, definimos a aplicação $\psi\colon \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R) \to A \otimes_{\Bbbk} R$ por

$$\psi(f) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f(x_i)$$

para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R)$.

A bijecção ψ corresponde à noção de coordenadas no R-módulo $A \otimes_{\Bbbk} R$, onde R é qualquer $\Bbbk$-álgebra comutativa com identidade, com respeito à R-base $(e_1 \otimes 1, \dots, e_n \otimes 1)$ de $A \otimes_{\Bbbk} R$. De facto, para qualquer $a \in A \otimes_{\Bbbk} R$, temos

$$a = \sum_{i=1}^{n} c_i(a)(e_i \otimes 1) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes c_i(a) = \psi(f)$$

onde $f \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R)$ é dado por

$$f(x_i) = c_i(a), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Notemos que, na bijecção

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R),$$

um elemento $f \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}]))$ corresponde ao seu comorfismo $f^* \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R)$. Deste modo, a correspondência

$$f \mapsto \psi(f^*) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f^*(x_i)$$

define uma aplicação bijectiva

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])) \to A \otimes_{\Bbbk} R$$

que permite identificar $A \otimes_{\Bbbk} R$ com $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}]))$

Lema 3.2.2. *Na notação acima, a aplicação ψ é bijectiva (logo, a aplicação φ também é bijectiva).*

Demonstração. Para a sobrejectividade, seja $u \in A \otimes_{\Bbbk} R$ arbitrário. Então, existem $r_1, \dots, r_n \in R$ tais que

$$u = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes r_i,$$

pelo que basta definir $f \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R)$ por $f(x_i) = r_i$, $1 \leq i \leq n$, e estender de modo natural à $\Bbbk$-álgebra $\Bbbk[\mathbf{x}]$ (porque $\Bbbk[\mathbf{x}]$ é gerada, como $\Bbbk$-álgebra, por $x_1, \ldots, x_n$).

Para a injectividade, se

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes g(x_i), \quad f, g \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R),$$

então

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes (f - g)(x_i) = 0.$$

Escolhendo uma $\Bbbk$-base $\{r_j \mid j \in J\}$ de R (como espaço vectorial sobre $\Bbbk$), podemos escrever

$$(f - g)(x_i) = \sum_{j \in J} \alpha_{ij} r_j, \quad \alpha_{ij} \in \Bbbk,$$

onde a soma é finita. Como $\{e_i \otimes r_j \mid 1 \leq i \leq n,\ j \in J\}$ é uma $\Bbbk$-base de $A \otimes_{\Bbbk} R$ e

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes (f - g)(x_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{j \in J} \alpha_{i,j} (e_i \otimes r_j),$$

concluímos que $\alpha_{i,j} = 0$ para todos $1 \leq i \leq n$ e $j \in J$. Segue-se que $f(x_i) = g(x_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$, logo $f = g$ (porque $\Bbbk[\mathbf{x}]$ é gerada por $x_1, \ldots, x_n$ e f e g são morfismo de $\Bbbk$-álgebras). $\square$

Em particular, obtemos uma bijecção

$$A \simeq A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{Spec}(\Bbbk), \mathrm{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}]))$$

que nos permite identificar A com o conjuntos dos pontos $\Bbbk$-racionais do $\Bbbk$-esquema $\mathrm{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$.

Se R for como acima, o morfismo de $\Bbbk$-álgebras $\mu^*\colon \Bbbk[\mathbf{x}] \times_{\Bbbk} \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{x}]$ (que corresponde à multiplicação μ em $\mathrm{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$) determina um morfismo de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[\mathbf{x}], R) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R)$$

definido, de maneira natural, pela correspondência $f \otimes g \mapsto (f \otimes g) \circ \mu^*$. Como

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[\mathbf{x}], R) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R) \otimes_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R),$$

obtemos um homorfismo de grupos abelianos

$$(A \otimes_{\Bbbk} R) \otimes_{\Bbbk} (A \otimes_{\Bbbk} R) \to A \otimes_{\Bbbk} R$$

que é dado pela correspondência

$$\psi(f) \otimes \psi(g) \mapsto \psi((f \otimes g) \circ \mu^*), \quad f, g \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R).$$

Ora, para quaisquer $f, g \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[\mathbf{x}], R)$, temos

$$\begin{aligned} \psi((f \otimes g) \circ \mu^*) &= \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes (f \otimes g)(x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes (f(x_i) + g(x_i) = \psi(f) + \psi(g). \end{aligned}$$

Isto significa que a multiplicação μ em $\mathrm{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$ determina a adição em todos os grupos aditivos de $A \otimes_R R$. Em particular, μ determina a adição no grupo aditivo de A. De maneira análoga, concluímos que a estrutura de grupo algébrico em $\mathrm{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$ determina a estrutura de grupo aditivo em todas as $\Bbbk$-álgebras $A \otimes_R R$ e, em particular, a estrutura do grupo aditivo de A.

De seguida, relacionamos a estrutura do grupo-álgebra $G = 1 + A$ com o $\Bbbk$-esquema $\mathrm{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$. Comecemos por observar que, se R for uma $\Bbbk$-álgebra comutativa e com identidade, então $A \otimes_{\Bbbk} R$ é uma $\Bbbk$-álgebra nilpotente (com respeito ao produto $(a \otimes r)(b \otimes s) = (ab) \otimes (rs)$ para $a, b \in A$ e $r, s \in R$) e, portanto, define um grupo-álgebra $1 + (A \otimes_{\Bbbk} R)$.

Lema 3.2.3. *Na notação acima, a $\Bbbk$-álgebra $A \otimes_{\Bbbk} R$ é nilpotente (isto é, para qualquer $u \in A \otimes_{\Bbbk} R$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $u^m = 0$).*

Demonstração. Seja $u \in A \otimes_{\Bbbk} R$ e sejam $r_1, \ldots, r_n \in R$ tais que

$$u = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes r_i.$$

Para cada $1 \leq i \leq n$, seja $n_i \in \mathbb{N}$ o menor inteiro tal que $e_i^{n_i} = 0$ e defina-se $m = \sum_{i=1}^{n} n_i$. Então, denotando por S_n o grupo simétrico de grau n, temos

$$u^m = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^{n} (e_{\sigma(1)}^{t_{i,\sigma(1)}} \ldots e_{\sigma(n)}^{t_{i,\sigma(n)}}) \otimes y_i$$

onde, para cada $1 \leq i \leq n$, $y_i \in R$ e $t_{i,\sigma(1)}, \ldots, t_{i,\sigma(n)} \in \mathbb{N}$ são tais que

$$\sum_{j=1}^{n} t_{i,\sigma(j)} = m = \sum_{i=1}^{n} n_i.$$

Logo, existe $1 \leq j \leq n$ tal que $n_j \leq t_{i,\sigma(j)}$ e, portanto, $e_{\sigma(j)}^{t_{i,\sigma(j)}} = 0$ o que implica $u^m = 0$. □

Denotando por $\mathbf{Nil}_{\Bbbk}$ a categoria das $\Bbbk$-álgebras nilpotentes (com os morfismos de $\Bbbk$-álgebras), as correspondências

$$\operatorname{Spec}(R) \mapsto A \otimes_{\Bbbk} R \quad \text{e} \quad \phi \mapsto \mathrm{id} \otimes \phi^*$$

(onde ϕ^* é o co-morfismo associado a um morfismo ϕ em $\mathbf{AffSch}_{\Bbbk}$) definem um functor contravariante da categoria $\mathbf{AffSch}_{\Bbbk}$ para a categoria $\mathbf{Nil}_{\Bbbk}$. (Como

$$\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\operatorname{Spec}(R), \operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])) \simeq \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R),$$

os lemas anteriores implicam que este functor é *representável* pelo $\Bbbk$-esquema afim $\operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$.)

O nosso objectivo seguinte é definir no $\Bbbk$-esquema $\operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$ uma estrutura de $\Bbbk$-grupo algébrico que corresponda à estrutura do grupo $1 + A$ (e, de facto, de $1 + (A \otimes_{\Bbbk} R)$ para qualquer R como antes).

Começamos por definir um $\Bbbk$-morfismo

$$\nu \colon \operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}]) \times_{\Bbbk} \operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}]) \to \operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$$

que "corresponda" à multiplicação da $\Bbbk$-álgebra A; equivalentemente, definimos um morfismo de $\Bbbk$-álgebras

$$\nu^* \colon \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{x}] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[\mathbf{x}].$$

Como $(e_1, \ldots, e_n)$ é uma base de A, a multiplicação de A é univocamente determinada pelos produtos $e_i e_j$ e que, para quaisquer $1 \leq i, j, k \leq n$, existem escalares $\alpha_{ijk} \in \Bbbk$ tais que

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ijk} e_k.$$

Assim, podemos definir o morfismo ν^* sobre os geradores de $\Bbbk[\mathbf{x}]$ por

$$\nu^*(x_k) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ijk} x_i \otimes x_j, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Este morfismo determina um $\Bbbk$-morfismo

$$\nu\colon \operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}]) \times_{\Bbbk} \operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}]) \to \operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$$

que define uma operação associativa em $\operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$ (porque $(\mathrm{id} \otimes \nu^*) \circ \nu^* = (\nu^* \mathrm{id}) \circ \nu^*)$ como se pode verificar sem dificuldade).

Se R for como acima, então ν^* determina um morfismo de grupos abelianos

$$\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R) \otimes_{\Bbbk} \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R) \to \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R),$$

definido pela correspondência

$$f \otimes g \mapsto (f \otimes g) \circ \nu^*,$$

e que este morfismo corresponde à multiplicação na $\Bbbk$-álgebra $A \otimes_{\Bbbk} R$, isto é, temos

$$\psi((f \otimes g) \circ \nu^*) = \psi(f)\psi(g), \quad f, g \in \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R).$$

Posto isto, definimos o morfismo de $\Bbbk$-álgebras

$$\boldsymbol{\mu}^*\colon \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{x}] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[\mathbf{x}]$$

por

$$\boldsymbol{\mu}^*(x_k) = x_k \otimes 1 + 1 \otimes x_k + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ijk} x_i \otimes x_j, \quad 1 \leq k \leq n$$

(isto é, $\boldsymbol{\mu}^* = \mu^* + \nu^*$ sobre os geradores $x_1, \ldots, x_n$ de $\Bbbk[\mathbf{x}]$). Como acima, obtemos um morfismo de grupos abelianos

$$\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R) \otimes_{\Bbbk} \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R) \to \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R),$$

que este morfismo corresponde à multiplicação no grupo $1 + (A \otimes_{\Bbbk} R)$, no sentido em que

$$\psi((f \otimes g) \circ \boldsymbol{\mu}^*) = \psi(f) + \psi(g) + \psi(f)\psi(g), \quad f, g \in \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], R).$$

Obtemos, assim, um $\Bbbk$-morfismo

$$\boldsymbol{\mu}\colon \operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}]) \times_{\Bbbk} \operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}]) \to \operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$$

que define uma operação associativa no $\Bbbk$-esquema $\operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$ e que corresponde à multiplicação no grupo-álgebra A.

Não é difícil verificar que o $\Bbbk$-morfismo $\varepsilon\colon \operatorname{Spec}(\Bbbk) \to \operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$ satisfaz

$$\boldsymbol{\mu} \circ (\varepsilon \times \mathrm{id}) = \mathrm{id} \circ \mathrm{pr}_2,$$

ou seja, que $(\varepsilon^* \otimes \mathrm{id}) \circ \boldsymbol{\mu}^* = (\varepsilon^*, \mathrm{id}) \circ \mathrm{id}$, e que ε corresponde à identidade no grupo $1 + (A \otimes_{\Bbbk} R)$. Sendo assim, para definirmos a estrutura de grupo algébrico em $\operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$ como queremos, resta definir um $\Bbbk$-morfismo $\boldsymbol{\iota}\colon \operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}]) \to \operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$ que satisfaça a condição

$$\boldsymbol{\mu} \circ (\boldsymbol{\iota}, \mathrm{id}) = \lambda \circ \varepsilon$$

onde $\lambda\colon \operatorname{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}]) \to \operatorname{Spec}(\Bbbk)$ é o morfismo de estrutura. Equivalentemente, definimos um morfismo de $\Bbbk$-álgebras $\boldsymbol{\iota}^*\colon \Bbbk[\mathbf{x}] \to \Bbbk[\mathbf{x}]$ tal que

$$(\boldsymbol{\iota}^* \otimes \mathrm{id}) \circ \boldsymbol{\mu}^* = \lambda^* \circ \varepsilon^* = 0.$$

Sobre os geradores $x_1, \dots, x_n$, esta igualdade determina n equações

$$\boldsymbol{\iota}^*(x_k) + x_k + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ijk} \boldsymbol{\iota}^*(x_i) x_j = 0, \quad 1 \le k \le n.$$

Para definir $\boldsymbol{\iota}^*$, usamos a bijecção

$$\psi\colon \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], \Bbbk[\mathbf{x}]) \to A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[\mathbf{x}]$$

e o elemento

$$\psi(\mathrm{id}) \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes x_i \in A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[\mathbf{x}].$$

Como $A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[\mathbf{x}]$ é uma $\Bbbk$-álgebra nilpotente, existe $\boldsymbol{\iota}^* \in \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathbf{x}], \Bbbk[\mathbf{x}])$ tal que

$$\psi(\boldsymbol{\iota}^*) = -\psi(\mathrm{id}) + \psi(\mathrm{id})^2 - \psi(\mathrm{id})^3 + \cdots$$

(porque a soma é finita). é claro que

$$\psi(\boldsymbol{\iota}^*) + \psi(\mathrm{id}) + \psi(\boldsymbol{\iota}^*)\psi(\mathrm{id}) = 0$$

(o que significa que $1 + \psi(\boldsymbol{\iota}^*)$ à a identidade do grupo $1 + (A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[\mathbf{x}])$). Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\psi((\boldsymbol{\iota}^* \otimes \mathrm{id}) \circ \boldsymbol{\mu}^*) &= \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes \left(\boldsymbol{\iota}^*(x_k) + x_k + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ijk} \boldsymbol{\iota}^*(x_i) x_j \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes \boldsymbol{\iota}^*(x_k) + \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes x_k + \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ijk} \boldsymbol{\iota}^*(x_i) x_j \Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi(\boldsymbol{\iota}^*) + \psi(\mathrm{id}) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ijk} e_k \right) \otimes \boldsymbol{\iota}^*(x_i) x_j \\
&= \psi(\boldsymbol{\iota}^*) + \psi(\mathrm{id}) + \sum_{i,j=1}^{n} e_i e_j \otimes \boldsymbol{\iota}^*(x_i) x_j \\
&= \psi(\boldsymbol{\iota}^*) + \psi(\mathrm{id}) + \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \boldsymbol{\iota}^*(x_i) \right) \left(\sum_{j=1}^{n} e_j \otimes x_j \right) \\
&= \psi(\boldsymbol{\iota}^*) + \psi(\mathrm{id}) + \psi(\boldsymbol{\iota}^*)\psi(\mathrm{id}) = 0
\end{aligned}
$$

e, portanto, concluímos que $(\boldsymbol{\iota}^* \otimes \mathrm{id}) \circ \boldsymbol{\mu}^* = 0$. Em conclusão, o morfismo $\boldsymbol{\iota}^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[\mathbf{x}], \mathbb{k}[\mathbf{x}])$ define a inversão $\boldsymbol{\iota}\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{k}[\mathbf{x}]) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{k}[\mathbf{x}])$ que queríamos.

Acabámos de provar que:

Proposição 3.2.4. *Na notação anterior, $\mathcal{G} = (\mathrm{Spec}(\mathbb{k}[\mathbf{x}]), \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\iota}, \varepsilon)$ é um grupo algébrico sobre $\mathbb{k}$. (Em geral, $\mathcal{G}$ não é comutativo.)*

Voltemos a notar que o esquema $\mathrm{Spec}(\mathbb{k}[\mathbf{x}])$ é reduzido, separado e de tipo finito. Por outro lado, dado que $\mathrm{Spec}(\mathbb{k}[\mathbf{x}])$ é um espaço toplógico conexo, qualquer um dos grupos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{G}$ é conexo.

3.3 Morfismo de Frobenius

Nesta secção, supomos que $\mathbb{k} = \mathbb{F}_q$ é um corpo finito com q elementos e característica p e denotamos por $\mathbb{F}$ o seu fecho algébrico.

Definição. Para qualquer $\mathbb{F}_q$-esquema X, defininos o $\mathbb{F}_q$-morfismo $\Phi_{X,q}\colon X \to X$ como sendo o par $(\mathrm{id}, \mathrm{Fr}_q)$, onde o morfismo de feixes $\mathrm{Fr}_q\colon \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$ é dado por: para qualquer aberto U de X, o morfismo de anéis

$$\mathrm{Fr}_{q,U}\colon \mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(U)$$

é definido pela correspondência $f \mapsto f^q$. Considerando o $\mathbb{F}$-esquema $X \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$, definimos o *morfismo (geométrico) de Frobenius* como sendo o morfismo de $\mathbb{F}$-esquemas $\Psi_{X,q} \times \mathrm{id}\colon X \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F} \to X \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$.

No caso em que $X = \mathrm{Spec}(R)$ é um $\mathbb{F}_q$-esquema afim, denotaremos o morfismo $\Phi_{\mathrm{Spec}(R),q}$ apenas por $\Phi_{R,q}$. Este morfismo é univocamente determinado pelo comorfismo $\mathrm{Fr}_{q,R}\colon R \to R$, que denotaremos apenas por Fr_q e que é definido por

$$\mathrm{Fr}_q(f) = f^q, \quad f \in R$$

(relembremos que $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(R)}(R) = R$). Em particular, para $R = \mathbb{F}_q[\mathbf{x}]$, o comorfismo $\mathrm{Fr}_q \colon \mathbb{F}_q[\mathbf{x}] \to \mathbb{F}_q[\mathbf{x}]$ é dado por

$$\mathrm{Fr}_q(f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)^q = f(x_1^q, \ldots, x_n^q)$$

para todo $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_q[\mathbf{x}]$.

Se $T = \mathrm{Spec}(S)$ for um $\mathbb{F}_q$-esquema afim, a correspondência

$$f \mapsto \Phi_{X,q} \circ f$$

define um morfismo de grupos abelianos de $X(S) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Spec}(S), X)$ em si próprio. Se, além disso, $X = \mathrm{Spec}(R)$ também for um $\mathbb{F}_q$-esquema afim, o isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Spec}(S), \mathrm{Spec}(R)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(R, S)$ determina um morfismo de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(R, S)$ em si próprio dado pela correspondência

$$f^* \mapsto f^* \circ \mathrm{Fr}_q$$

onde f^* é o comorfismo associado a $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Spec}(S), \mathrm{Spec}(R))$.

Consideremos agora uma $\mathbb{F}_q$-álgebra nilpotente A de dimensão finita n. Como antes, fixamos uma $\mathbb{F}_q$-base $(e_1, \ldots, e_n)$ e relembramos que a correspondência

$$f \mapsto \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f^*(x_i)$$

define um morfismo de grupos abelianos

$$\varphi \colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q[\mathbf{x}])) \to A \otimes_{\mathbb{F}_q} R$$

onde R é qualquer $\mathbb{F}_q$-álgebra comutativa com identidade. Deste modo, pondo $\mathcal{A} = \mathrm{Spec}(\Bbbk[\mathbf{x}])$, temos um morfismo de grupos abelianos

$$\varphi \colon \mathcal{A}(R) \to A \otimes_{\mathbb{F}_q} R.$$

Para qualquer $f \in \mathcal{A}(R)$, podemos considerar $\Phi_{\mathcal{A},q} \circ f \in \mathcal{A}(R)$ e, portanto, definir o elemento

$$\begin{aligned}\varphi(\Phi_{\mathcal{A},q} \circ f) &= \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes (\Phi_{\mathcal{A},q} \circ f)^*(x_i) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes (f^* \circ \mathrm{Fr}_q)(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f^*(x_i^q) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f^*(x_i)^q\end{aligned}$$

(porque $f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q[\mathbf{x}], R)$ é um morfismo de $\mathbb{F}_q$-álgebras). Sendo assim, a correspondência $f \mapsto \Phi_{\mathcal{A},q} \circ f$ determina um morfismo de grupos abelianos $A \otimes_{\mathbb{F}_q} R \mapsto A \otimes_{\mathbb{F}_q} R$ definido pela correspondência

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes a_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes a_i^{\,q}.$$

Denotaremos este morfismo também por Fr_q e chamar-lhe-emos o *morfismo de Frobenius* em $A \otimes_{\mathbb{F}_q} R$.

Em particular, se $R = \mathbb{F}$ (o fecho algébrico de $\mathbb{F}_q$), obtemos o *morfismo de Frobenius*

$$\mathrm{Fr}_q\colon A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F} \to A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}.$$

Neste caso, não é difícil verificar que Fr_q é um isomorfismo. De facto, se denotarmos também por Fr_q o morfismo $\mathrm{Fr}_q\colon \mathcal{A}(\mathbb{F}) \to \mathcal{A}(\mathbb{F})$ que é definido pela correspondência $f \mapsto \Psi_{\mathcal{A},q} \circ f$, obtemos um isomorfismo de grupos abelianos. Notemos que os elementos de $\mathcal{A}(\mathbb{F})$ são exactamente os pontos geométricos $\bar{x}\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{F}) \to \mathcal{A}$ do $\mathbb{F}_q$-esquema $\mathcal{A} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q[\mathbf{x}])$.

De modo análogo, podemos considerar $R = \mathbb{F}_{q^r}$ para qualquer $r \in \mathbb{N}$. Neste caso, obtemos o *morfismo de Frobenius*

$$\mathrm{Fr}_{q^r}\colon A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r} \to A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r},$$

que corresponde a $\mathrm{Fr}_q\colon \mathcal{A}(\mathbb{F}_{q^r}) \to \mathcal{A}(\mathbb{F}_{q^r})$ onde $\mathcal{A}(\mathbb{F}_{q^r})$ consiste em todos os morfismos de $\mathbb{F}_q$-esquemas $\bar{x}\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^r}) \to \mathcal{A}$. Sem perda de generalidade, supomos que $\mathbb{F}_{q^r} \subseteq \mathbb{F}$, de modo que $A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r}$ pode ser considerado um subgrupo de $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$. Nesta situação, também $\mathcal{A}(\mathbb{F}_{q^r})$ pode ser considerado um subgrupo de $\mathcal{A}(\mathbb{F})$ onde um morfismo $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^r}) \to \mathcal{A}$ é identificado, de modo natural, com um morfismo $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}) \to \mathcal{A}$ (fazendo a composição com o morfismo $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^r})$).

Finalmente, observemos que $A \simeq A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q$ consiste em todos os elementos de $A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ que são fixos por Fr_q, isto é,

$$A = \{\bar{a} \in A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F} \mid \mathrm{Fr}_q(\bar{a}) = \bar{a}\}.$$

Do mesmo modo, $\mathcal{A}(\mathbb{F}_q)$ consiste em todos os pontos geométricos $\bar{x} \in \mathcal{A}(\mathbb{F})$ que são fixos por Fr; neste caso, isto significa que $\mathrm{Fr}_q \circ \bar{x} = \bar{x}$, logo

$$\mathcal{A}(\mathbb{F}_q) = \{\bar{x} \in \mathcal{A}(\mathbb{F}) \mid \mathrm{Fr}_q \circ \bar{x} = \bar{x}\}.$$

Observemos ainda que, para qualquer $r \in \mathbb{N}$, os grupos $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r}$ e $\mathcal{A}(\mathbb{F}_{q^r})$ (que são isomorfos) consistem nos pontos fixos para a r-ésima potência do respectivo morfismo de Frobenius Fr_q. De facto, $(\mathrm{Fr}_q)^r$ é essencialmente o morfismo de Frobenius Fr_{q^r} definido na $\mathbb{F}_{q^r}$-álgebra nilpotente $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r}$ e que é determinado pelo morfismo (geomético) de Frobenius definido a partir do $\mathbb{F}_{q^r}$-esquema $\mathcal{A} \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r}$. Observemos que, $\mathbb{F}$ é o fecho algébrico de $\mathbb{F}_{q^r}$ e que os esquemas $\mathcal{A} \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ e $(\mathcal{A} \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r}) \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ são naturalmente isomorfos. Temos, também,

$$(A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r}) \otimes_{\mathbb{F}_{q^r}} \mathbb{F} \simeq A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F} \quad \text{e} \quad (\mathcal{A} \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r})(\mathbb{F}) \simeq \mathcal{A}(\mathbb{F}).$$

Capítulo 4

Feixes de Caracteres para Grupos Abelianos

Neste capítulo, definimos a noção de feixe de caracteres no contexto dos grupos algébricos abelianos definidos sobre um corpo finito $\mathbb{F}_q$; como antes, q é uma potência de um número primo p. Em particular, estamos interessados no caso do grupo aditivo de uma $\mathbb{F}_q$-álgebra nilpotente A de dimensão finita. Como no capítulo anterior, consideramos um conjunto $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de indeterminadas sobre $\mathbb{F}_q$, onde n é a dimensão de A, e consideramos o $\mathbb{F}_q$-esquema

$$\mathcal{A} = \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_q[\mathbf{x}])$$

com a estrutura de grupo abeliano como na secção 3.2. Mantemos a notação do capítulo 3. Em particular, $\mathbb{F}$ denota o fecho algébrico de $\mathbb{F}_q$ e, para cada $r \in \mathbb{N}$, consideramos o corpo finito $\mathbb{F}_{q^r}$ como uma extensão de $\mathbb{F}_q$ e como um subcorpo de $\mathbb{F}$.

Por outro lado, fixamos um número primo $\ell \neq p$ e escolhemos um fecho algébrico $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ do corpo $\mathbb{Q}_\ell$ dos racionais ℓ-ádicos. Vamos estar interessados nas representações do grupo abelianos (finito) A sobre $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. O objectivo é definir certos objectos geométricos (os feixes de caracteres) sobre o grupo algébrico $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ a partir dos quais os caracteres irredutíveis dos grupos finitos

$$\mathcal{A}(\mathbb{F}_{q^r}) \simeq A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r}, \quad r \in \mathbb{N},$$

possam ser obtidos por um processo uniforme (independente de r). A razão de usarmos representações sobre $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ deve-se a precisarmos de usar cohomologia ℓ-ádica para definir os feixes de caracteres. A passagem de uma representação sobre $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ para uma representação complexa (e vice-versa) pode fazer-se escolhendo um isomorfismo de corpos $\bar{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$.

4.1 O grupo dual de $\mathcal{A}(\mathbb{F})$

Para qualquer $r \in \mathbb{N}$, consideremos o grupo

$$\widehat{A}(\mathbb{F}_{q^r}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{A}(\mathbb{F}_{q^r}), \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$$

que consiste em todos os caracteres lineares de $\mathcal{A}(\mathbb{F}_{q^r})$. Podemos descrever os caracteres lineares de $\mathcal{A}(\mathbb{F}_{q^r})$ em termos dos caracteres lineares de $\mathcal{A}(\mathbb{F}_q)$ da forma seguinte.

Para quaisquer $r, s \in \mathbb{N}$ com $r \mid s$, definimos o aplicação-traço

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_{q^r}} : \mathcal{A}(\mathbb{F}) \to \mathcal{A}(\mathbb{F})$$

por

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_{q^r}}(x) = x + \mathrm{Fr}_{q^r}(x) + \mathrm{Fr}_{q^{2r}}(x) + \cdots + \mathrm{Fr}_{q^{s-r}}(x), \quad x \in \mathcal{A}(\mathbb{F}).$$

$\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_{q^r}}$ é um morfismo de grupos (abelianos) que se restringe a um morfismo sobrejectivo

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_{q^r}} : \mathcal{A}(\mathbb{F}_{q^s}) \to \mathcal{A}(\mathbb{F}_{q^r}).$$

Definimos então o morfismo de grupos

$$\widehat{\mathrm{tr}}_{\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_{q^r}} : \widehat{A}(\mathbb{F}_{q^s}) \to \widehat{A}(\mathbb{F}_{q^r})$$

por

$$\widehat{\mathrm{tr}}_{\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_{q^r}}(\nu) = \nu \circ \widehat{\mathrm{tr}}_{\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_{q^r}}, \quad \nu \in \widehat{A}(\mathbb{F}).$$

Finalmente, podemos considerar os morfismos de traço como morfismos de transição de modo a definir o grupo

$$\widehat{A}(\mathbb{F}) = \varinjlim_{r \in \mathbb{N}} \widehat{A}(\mathbb{F}_{q^r})$$

como o limite directo de todos os grupos (finitos) $\widehat{A}(\mathbb{F}_{q^r})$ sobre todas as extensões finitas de $\mathbb{F}_q$.

Para toda a extensão finita $\mathbb{F}_{q^r}$ de $\mathbb{F}_q$, o grupo de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_{q^r})$ actua de forma natural em $\widehat{A}(\mathbb{F})$ e que temos um isomorfismo

$$\widehat{A}(\mathbb{F}_{q^r}) \simeq \widehat{A}(\mathbb{F})^{\mathrm{Gal}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_{q^r})}$$

que permite identificar $\widehat{A}(\mathbb{F}_{q^r})$ com o grupo de todos pontos fixos de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_{q^r})$ em $\widehat{A}(\mathbb{F})$. Assim, o grupo abeliano $\widehat{A}(\mathbb{F})$, juntamente com as acções dos grupos de Galois, contém informação sobre as representações de todos os grupos finitos $\mathcal{A}(\mathbb{F}_{q^r})$ de forma compatível. Nas secções seguintes, iremos definir uma classe de objectos geométricos que capturam essas representações e explicar como a conseguimos (no caso do grupos abelianos).

4.2 Feixes de caracteres

A definição de feixe de caracteres que se segue é sugerida por M. Boyarchenko e V. Drinfeld (ver o artigo [**?**]) e é formulada para qualquer grupo algébrico sobre $\mathbb{F}_q$.

Definição. Dado um grupo algébrico G sobre $\mathbb{F}_q$, definimos a colecção dos *feixes de caracteres* $\mathrm{CS}(\bar{G})$, onde $\bar{G} = G \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$, como sendo uma colecção de complexos de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-feixes $\mathscr{F} \in \mathbf{D}_c^b(\bar{G})$ que satisfazem as propriedades seguintes:

- Os feixes de caracteres devem apenas depender do grupo $\bar{G}$, ou seja, o conjunto das classes de isomorphismo de feixes de caracteres em $\mathrm{CS}(\bar{G})$ deve ser invariante para qualquer automorfismo de $\bar{G}$ como grupo algébrico sobre $\mathbb{F}$.

- Os feixes de caracteres são feixes perversos em $\bar{G}$.

- Para todo o $r \in \mathbb{N}$, definimos a subcolecção

  $$\mathrm{CS}(\bar{G})^{\mathrm{Fr}_{q^r}} = \{\mathscr{F} \in \mathrm{CS}(\bar{G}) \mid (\mathrm{Fr}_{q^r})^*\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}\}$$

  de $\mathrm{CS}(\bar{G})$. Escolhendo um isomorfismo $\psi_{r,\mathscr{F}} \colon (\mathrm{Fr}_{q^r})^*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ para cada $\mathscr{F} \in \mathrm{CS}(\bar{G})^{\mathrm{Fr}_{q^r}}$ tal que

  $$\psi_{s,\mathscr{F}} = (\psi_{r,\mathbb{F}}) \circ (\mathrm{Fr}_{q^{2r}})^*(\psi_{r,\mathscr{F}}) \circ \cdots \circ (\mathrm{Fr}_{q^{s-r}})^*(\psi_{r,\mathscr{F}}),$$

  então as funções-traço $\mathrm{tr}_{r,\mathscr{F}} \colon \bar{G}(\mathrm{Fr}_{q^r}) \to \bar{G}(\mathrm{Fr}_{q^r})$, definidas por

  $$\mathrm{tr}_{r,\mathscr{F}}(g) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \mathrm{tr}(\psi_{r,\mathscr{F}}; \mathscr{H}^i(\mathscr{F})_g),$$

  são os caracteres irredutíveis de $\bar{G}(\mathbb{F}_{q^r})$ sobre $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Aqui, $\mathscr{H}^i(\mathscr{F})$ denota o i-ésimo feixe cohomológico do complexo $\mathscr{F}$ e $\mathscr{H}^i(\mathscr{F})_g$ é o seu germe no ponto $g \in \bar{G}(\mathbb{F}_{q^r})$ que é visto como um ponto fixo para o morfismo Fr_{q^r}, de modo que $\psi_{r,\mathscr{F}}$ induz uma aplicação linear de $\mathscr{H}^i(\mathscr{F})_g$ em si mesmo (logo, a fórmula faz sentido). (Mencionemos que, como os feixes de caracteres são feixes perversos, os isomorphismos $\psi_{r,\mathscr{F}}$ são únicos a menos de escalonamento.)

O nosso propósito é ilustrar esta definição no caso em que G é o grupo afim $\mathcal{A} = \mathrm{Spec}(\mathbb{k}[\mathbf{x}])$. Não iremos, no entanto, preocupar-nos com a segunda condição, embora façamos de seguida um pequeno resumo da definição de feixe perverso.

Seja X um um esquema separado e de tipo finito sobre um corp $\Bbbk$ e denotemos a categoria $\mathbf{D}^b_c(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ apenas por $\mathbf{D}(X)$. Se $\lambda\colon X \to \mathrm{Spec}(\Bbbk)$ for o morfismo de estrutura, definimos o *complexo dualizante* de X como sendo

$$\mathbb{K}_X = \lambda^! \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

e o *functor de dualidade de Verdier* $\mathbb{D}_X\colon \mathbf{D}(X)^\circ \to \mathbf{D}(X)$ por

$$\mathbb{D}_X(\mathscr{F}) = \mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathbb{K}_X), \quad \mathscr{M} \in \mathbf{D}(X).$$

Por outro lado, definimos a subcategoria

$${}^p\mathbf{D}^{\leq 0}(X) = \{\mathscr{F} \in \mathbf{D}(X) \mid \dim(\mathrm{supp}\mathscr{H}^i(\mathscr{F})) \leq -i \ \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

de $\mathbf{D}(X)$. Da definição resulta que, se $\mathscr{F} \in {}^p\mathbf{D}^{\leq 0}(X)$, então $\mathscr{H}^i(\mathscr{F}) = 0$ para todo $i > 0$. Posto isto, definimos

$${}^p\mathbf{D}^{\geq 0}(X) = \mathbb{D}_X(\mathbf{D}^{\leq 0}(X))$$

de $\mathbf{D}(X)$ e chamamos *feixe perverso* em X a qualquer objecto da intersecção

$$\mathbf{Prev}(X) = {}^p\mathbf{D}^{\leq 0}(X) \cap {}^p\mathbf{D}^{\geq 0}(X).$$

Observamos que, se $\mathscr{F}$ for um feixe perverso em X, então $\mathbb{D}_X(\mathscr{F})$ também é um feixe perverso. Além disso, qualquer feixe perverso tem comprimento finito.

4.3 O grupo fundamental de um esquema

A ideia do uso de Geometria Algébrica no estudo das representações de grupos finitos do tipo $G(\mathbb{F}_q)$ e terá tido a sua origem nos trabalhos de P. Deligne (cuja base pode ser encontrada no SGA$4\frac{1}{2}$ [**?**]). Nesta secção, descrevemos essa ideia (os detalhes podem ser encontrados no livro [**?**]).

Seja $G = (G, \mu, \iota, \varepsilon)$ um grupo algébrico conexo sobre $\mathbb{F}_q$. Para qualquer ponto geométrico $\bar{x}\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{F}) \to G$ com centro x, definimos o *grupo fundamental étale* $\pi_1(G, \bar{x})$ como se segue.

Dados um aberto étale $U \to G$, consideramos o grupo $\mathrm{Aut}_G(U)$ de todos automorfismos étale de $U \to G$ e denotamos por $\mathrm{Aut}_G(U)^\circ$ o grupo oposto. O grupo $\mathrm{Aut}_G(U)$ é finito e actua naturalmente sobre $U \to G$ à esquerda e, portanto, $\mathrm{Aut}_G(U)^\circ$ também é finito e actua sobre $U \to G$ à direita. Por outro lado, definimos a *fibra geométrica* $U(\bar{x})$ como sendo o conjunto de todos os pontos geométricos $\bar{y}\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{F}) \to U$ para os quais o diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] & G \\ \mathrm{Spec}(\mathbb{F}) \arrow[u, "\bar{y}"] \arrow[ur, "\bar{x}"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo; relembremos este triângulo é uma vizinhança étale de $\bar{x}$. Como G é conexo, $U(\bar{x})$ é um conjunto finito.

Dizemos que um par $(U, \bar{y})$ é uma *cobertura étale* de $(G, \bar{x})$ se $U \to G$ for um aberto étale de G e se $\bar{y} \in X(\bar{x})$ e dizemos que uma cobertura étale $(U, \bar{y})$ de $(G, \bar{x})$ é *de Galois* se o grupo $\mathrm{Aut}_G(U)^\circ$ actuar transitivamente em $U(\bar{x})$. Quando o esquema U é conexo, então uma cobertura étale $(U, \bar{y})$ de $(G, \bar{x})$ é de Galois se e só se $|\mathrm{Aut}_G(U)| = |U(\bar{x})|$.

Posto isto, definimos

$$\pi_1(G, \bar{x}) = \varprojlim_{(U,\bar{y})} \mathrm{Aut}_G(U)^\circ$$

onde o limite é tomado sobre todas as coberturas étale de Galois $(U, \bar{y})$ de $(G, \bar{x})$.

O grupo fundamental $\pi_1(G, \bar{x})$ é um grupo topológico compacto (para a topologia do limite) e os seus subgrupos abertos normais são exactamente os grupos fundamentais $\pi_1(U, \bar{y})$ onde $(U, \bar{y})$ é uma cobertura étale de Galois de $(G, \bar{x})$.

O teorema que se segue está na base do estudo iniciado nesta tese; a demonstração pode encontrar-se no livro [**?**] (Corollary 10.1.24). Antes, referimos que por uma $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$*-representação* de $\pi_1(G, \bar{x})$ entendemos um morfismo de grupos $\pi_1(G, \bar{x}) \to \mathrm{GL}(V)$, em que V é algum espaço vectorial sobre $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ com dimensão finita, que satisfaz o seguinte:

- existe um corpo $\mathbb{Q}_\ell \subseteq E \subseteq \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ tal que a extensão $\mathbb{Q}_\ell$ é finita;
- existe um espaço vectorial V_E sobre E com dimensão finita em que $\pi_1(G, \bar{x})$ actua continuamente tal que

  $$V \simeq V_E \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

  e o morfismo $\pi_1(G, \bar{x}) \to \mathrm{GL}(V)$ é a composição de morfismos

  $$\pi_1(G, \bar{x}) \to \mathrm{GL}(V_E) \to \mathrm{GL}(V_E \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq GL(V).$$

Teorema 4.3.1. *Sejam G um grupo algébrico conexo, $\bar{x}\colon \operatorname{Spec}(\mathbb{F}) \to G$ um ponto geométrico de G. Então, a correspondência $\mathscr{E} \mapsto \mathscr{E}_{\bar{x}}$ define uma equivalência entre a categoria dos $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-sistemas locais em G e a categoria das $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-representações do grupo fundamental $\pi_1(G, \bar{x})$.*

Consideremos agora o morfismo de Frobenius $\operatorname{Fr}_q\colon G \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F} \to G \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ e definamos o *morfismo de Lang* $L_q\colon G \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F} \to G \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ como sendo a composição

$$G \xrightarrow{(\operatorname{Fr}_q, \iota)} G \times_{\mathbb{F}_q} G \xrightarrow{\ \mu\ } G$$

No conjunto dos pontos (fechados) $G(\mathbb{F}) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\operatorname{Spec}(\mathbb{F}), G)$, temos

$$L_q(x) = \operatorname{Fr}_q(x)x^{-1}, \quad x \in G(\mathbb{F}).$$

é conhecido que L_q é um morfismo étale e, portanto, $G \overset{L_q}{\to} G$ é um aberto étale de G. Para qualquer $g \in G(\mathbb{F}_q)$, seja

$$\phi_g\colon G(\mathbb{F}) \to G(\mathbb{F}), \quad x \mapsto xg,$$

a multiplicação à direita por g. Como $\operatorname{Fr}_q(g) = g$, temos

$$L_q(xg) = \operatorname{Fr}_q(xg)(xg)^{-1} = \operatorname{Fr}_q(x)\operatorname{Fr}_q(g)g^{-1}x^{-1} = L_q(x), \quad x \in G(\mathbb{F}),$$

e, portanto, $L_q \circ \phi_g = L_q$, ou seja $\phi_g \in \operatorname{Aut}_G(G)$. Sendo assim, obtemos uma aplicação injectiva

$$\phi\colon G(\mathbb{F}_q) \to \operatorname{Aut}_G(G), \quad g \mapsto \phi_g;$$

de facto, ϕ é um morfismo de grupos $G(\mathbb{F}_q) \to \operatorname{Aut}_G(G)^\circ$.

Por outro lado, seja $\bar{x}\colon \operatorname{Spec}(\mathbb{F}) \to G$ um ponto geométrico de G e consideremos a fibra geométrica $G(\bar{x})$. Por definição, $G(\bar{x})$ consiste em todos os pontos geométricos $\bar{y}\colon \operatorname{Spec}(\mathbb{F}) \to G$ tais que $L_q \circ \bar{y} = \bar{x}$. O grupo finito $G(\mathbb{F}_q)$ actua sobre $G(\bar{x})$ à direita por:

$$\bar{y}g = \mu \circ (\bar{y} \times g), \quad \bar{y} \in G(\bar{x}),\ g \in G(\mathbb{F}_q).$$

Para $\bar{y} \in G(\bar{x})$, temos

$$G(\bar{y}) = \{\bar{y}g \mid g \in G(\mathbb{F}_q)\},$$

logo a aplicação

$$G(\mathbb{F}_q) \to G(\bar{x}), \quad g \mapsto \bar{y}g,$$

é bijectiva. Segue-se que a acção de $G(\mathbb{F}_q)$ sobre $G(\bar{x})$ é transitiva e, portanto,

$$|G(\bar{y})| = |G(\mathbb{F}_q)| = |\operatorname{Aut}_G(G)|.$$

Concluindo, para cada $\bar{y} \in G(\bar{x})$, o morfismo de Lang $L_q\colon G \to G$ define uma cobertura étale de Galois $(G, \bar{y})$ de $(G, \bar{x})$.

Consideremos a bijecção

$$\mathrm{Hom}_G(G,G) = \mathrm{Aut}_G(G) \to G(\bar{x}), \quad \phi \mapsto \phi \circ \bar{y},$$

onde $\bar{y} \in G(\bar{x})$ é fixo. A acção à esquerda de $\mathrm{Aut}_G(G)^\circ$ sobre $\mathrm{Hom}_G(G,G)$ é dada por

$$(\psi, \phi) \mapsto \phi \circ \psi$$

e, portanto a acção à esquerda de $\mathrm{Aut}_G(G)^\circ$ sobre $G(\bar{x})$ é dada por

$$(\psi, \phi \circ \bar{y}) \mapsto \phi \circ \psi \circ \bar{y}.$$

Usando o isomorfismo $\mathrm{Aut}_G(G)^\circ \simeq G(\mathbb{F}_q)$, concluímos que $G(\mathbb{F}_q)$ actua à esquerda sobre $G(\bar{x})$ por

$$g(\phi \circ \bar{y}) = \phi \circ \phi_g \circ \bar{y}, \quad g \in G(\mathbb{F}_q),\ \phi \in \mathrm{Hom}_G(G,G).$$

Por outro lado, a acção à direita de $G(\mathbb{F}_q)$ sobre $G(\bar{x})$ é dada por $\bar{z}h = \phi_h \circ \bar{z}$, logo

$$(\phi \circ \bar{y})h = \phi_h \circ \phi \circ \bar{y}, \quad \phi \in \mathrm{Hom}_G(G,G),\ g \in G(\mathbb{F}_q).$$

Segue-se que

$$g\big((\phi \circ \bar{y})h\big) = \big(g(\phi \circ \bar{y})\big)h = \phi_h \circ \phi \circ \phi_g \circ \bar{y}$$

para todos $g, h \in G(\mathbb{F}_q)$ e $\phi \in \mathrm{Hom}_G(G,G)$. Em conclusão, a acção à esquerda de $\mathrm{Aut}_G(G)^\circ$ sobre $G(\bar{x})$ comuta com a acção à direita de $G(\mathbb{F}_q)$, o que implica que a acção à esquerda do grupo fundamental $\pi_1(G,\bar{x})$ sobre $G(\bar{x})$ comuta com a acção à direita de $G(\mathbb{F}_q)$.

Por fim, como os estabilizadores dos pontos de $G(\bar{x})$ são triviais, o conjunto finito $G(\bar{x})$ é isomorfo por permutações a $G(\mathbb{F}_q)$, onde consideramos a acção de $G(\mathbb{F}_q)$ sobre si próprio por multiplicação à direita. Por conseguinte, podemos definir naturalmente uma acção à esquerda de $\pi_1(G,\bar{x})$ sobre $G(\mathbb{F}_q)$ de tal forma que esta acção comuta com a multiplicação à direita sobre $G(\mathbb{F}_q)$. Esta acção é completamente determinada pela aplicação

$$\varphi\colon \pi_1(G,\bar{x}) \to G(\mathbb{F}_q), \quad \sigma \mapsto \sigma e$$

onde e é a identidade de $G(\mathbb{F}_q)$. Como G é conexo, o grupo fundamental $\pi_1(G,\bar{x})$ actua transitivamente sobre $G(\bar{x})$ e isto implica que o morfismo φ é sobrejectivo.

Agora, seja $\rho\colon G(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{GL}(V)$ uma $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-representação de $G(\mathbb{F}_q)$ (com os mesmos pressupostos que acima). Então, $\rho \circ \varphi\colon \pi_1(G, \bar{x}) \to \mathrm{GL}(V)$ é uma $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-representação de $\pi_1(G, \bar{x})$ e, portanto, existe um $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-sistema local $\mathscr{E}$ em G tal que $V \simeq \mathscr{E}_{\bar{x}}$. Este sistema local pode ser obtido da maneira seguinte. Por um lado, consideramos a acção à esquerda

$$G(\mathbb{F}) \times G(\mathbb{F}) \to G(\mathbb{F}), \quad (x, y) \mapsto xy.$$

Por outro lado, consideramos a acção à esquerda

$$G(\mathbb{F}) \times G(\mathbb{F}) \to G(\mathbb{F}), \quad (x, y) \mapsto \mathrm{Fr}_q(x) y x^{-1}.$$

Com respeito a estas acções, o morfismo de Lang é G-equivariante, ou seja, temos

$$L_q(xy) = \mathrm{Fr}_q(x) L_q(y) x^{-1}, \quad x, y \in G(\mathbb{F}).$$

Como

$$L_q(xy) = L_q(x), \quad x \in G(\mathbb{F}), y \in G(\mathbb{F}_q),$$

obtemos um isomorfismo $L_q\colon G/G(\mathbb{F}_q) \to G$ que identifica G com o quociente $G/G(\mathbb{F}_q)$. Sabe-se que, nesta situação, o functor $(L_q)^*$ induz uma equivalência entre a categoria dos $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-sistemas locais em G e a categoria dos $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-sistemas locais $G(\mathbb{F}_q)$-equivariantes (com respeito à acção de $G(\mathbb{F}_q)$ em G definida pela multiplicação à direita). Em particular, se $\mathscr{V} \equiv V$ for o $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-sistema local em G equipado com a estrutura $G(\mathbb{F}_q)$-equivariante definida pela $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-representação $\rho\colon G(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{GL}(V)$, então $\mathscr{E}$ é o único (a menos de isomorfismo) $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-sistema local tal que $(L_q)^*\mathscr{E} = \mathscr{V}$. Em virtude do isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{E}, (L_q)_*\mathscr{V}) \simeq \mathrm{Hom}((L_q)^*\mathscr{E}, \mathscr{V}),$$

concluímos que

$$\mathscr{E} \simeq (L_q)_*\mathscr{V} = (L_q)_!\mathscr{V}$$

(notemos que $(L_q)_* = (L_q)_!$ porque L_q é um morfismo finito).

4.4 Feixes de caracteres para $\mathcal{A}$

Nesta secção, iremos construir os feixes de caracteres para o grupo algébrico abeliano $\mathcal{A} = (\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q[\mathbf{x}]), \mu, \iota, \varepsilon)$ que está associado ao grupo aditivo A^+ da $\mathbb{F}_q$-álgebra nilpotente A. A construção é válida para qualquer grupo algébrico abeliano conexo G sobre $\mathbb{F}_q$. Como é costume, pomos $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ onde $\mathbb{F}$ é o fecho algébrico de $\mathbb{F}_q$. Nesta situação, definimos feixe de caracteres da forma seguinte.

Definição. Por um *feixe de caracteres* em $\bar{\mathcal{A}}$ entendemos um $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-sistema local $\mathscr{L}$ de característica 1 em $\bar{\mathcal{A}}$ tal que

$$\mu^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L} \boxtimes \mathscr{L} = (\mathrm{pr}_1)^*\mathscr{L} \otimes (\mathrm{pr}_2)^*\mathscr{L}$$

onde pr_1 e pr_2 são os morfismos de projecção $\bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}}$. Denotaremos por $\mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$ a colecção dos feixes de caracteres em $\bar{\mathcal{A}}$.

Os feixes de caracteres em $\bar{\mathcal{A}}$ podem ser obtidos como se segue.

Consideramos o morfismo de Frobenius $\mathrm{Fr}_q\colon \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}}$; para simplificar, pomos $F = \mathrm{Fr}_q$. Seja $L\colon \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}}$ o morfismo de Lang que, em $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}) \cong A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$, é definido por

$$L(a) = F(a) - a, \quad a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}).$$

Então, $L\colon \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}) \to \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F})$ é um morfismo de grupos sobrejectivo e com núcleo finito

$$\mathrm{Ker}(L) = \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q).$$

Consideremos o o sistema local

$$\mathscr{E} = L_!\bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

em $\bar{\mathcal{A}}$, onde $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ denota o feixe constante em $\bar{\mathcal{A}}$ associado a $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Como L é um morfismo finito, temos $L_! = L_*$ e, portanto, para qualquer aberto $U \subseteq \bar{\mathcal{A}}$, o espaço vectorial $\mathscr{E}(U)$ consiste em todas as funções contínuas $L^{-1}(U) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ (considerando em $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ a topologia discreta). Além disso, para qualquer $y \in \bar{\mathcal{A}}$, o germe $\mathscr{E}_y$ é o espaço vectorial de todas as funções $f\colon L^{-1}(y) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$.

Seja $y \in \bar{\mathcal{A}}$ qualquer. Em $\mathscr{E}_y$, definimos uma acção à esquerda de $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$ por

$$(a \cdot f)(x) = f(x + a), \quad a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q),\ f \in \mathscr{E}_b,\ x \in L^{-1}(y),$$

de modo que $\mathscr{E}_y$ toma a estrutura de um $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)]$-módulo à esquerda ($\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)]$ denota a álgebra do grupo $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$ sobre $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$).

Seja $\{\delta_x \mid x \in L^{-1}(y)\}$ a base canónica de $\mathscr{E}_y$ constituída pelas funções características:

$$\delta_x(x') = \delta_{x,x'}, \quad x, x' \in\in L^{-1}(y).$$

Como $|L^{-1}(y)| = |\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)|$, esta base é finita com cardinalidade $|\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)|$. Dados $x \in L^{-1}(y)$ e $a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$, temos $a \cdot \delta_x = \delta_{-a,x}$ e, portanto,

$$\mathscr{E}_y \simeq \bar{\mathbb{Q}}_\ell\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$$

(isto é, $\mathscr{E}_y$ é isomorfo ao $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$-módulo regular).

Como $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ tem característica zero, podemos decompor $\mathscr{E}_y$ em submódulos irredutíveis. Como $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$ é um grupo abeliano (finito), os $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)]$-módulos irredutíveis têm dimensão 1. Como $\mathscr{E}_y \simeq \bar{\mathbb{Q}}_\ell \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$, concluímos que

$$\mathscr{E}_y = \bigoplus_{\vartheta \in \operatorname{Hom}(\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q), \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times)} (\mathscr{E}_y)^\vartheta$$

onde

$$(\mathscr{E}_y)^\vartheta = \{f \in \mathscr{E}_y \mid (a \cdot f)(x) = \vartheta(a) f(x)\ \forall a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q),\ x \in L^{-1}(y)\}.$$

Deste modo, obtemos a decomposição

$$\mathscr{E} = \bigoplus_{\vartheta \in \operatorname{Hom}(\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q), \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times)} \mathscr{E}^\vartheta$$

como uma soma directa de sistemas locais onde $\mathscr{E}^\vartheta$, $\vartheta \in \operatorname{Hom}(\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q), \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$, é o único $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-sistema local de dimensão 1 tal que o seu germe em $y \in \bar{\mathcal{A}}$ é

$$(\mathscr{E}^\vartheta)_y = (\mathscr{E}_y)^\vartheta.$$

Consideremos agora o feixe $F^*\mathscr{E}^\vartheta$ para $\vartheta \in \operatorname{Hom}(\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q), \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$. Para qualquer $y \in \bar{\mathcal{A}}$, temos

$$(F^*\mathscr{E}^\vartheta)_y \simeq \mathscr{E}_{F(y)}.$$

Como $L \circ F = F \circ L$, a correspondência $f \mapsto f \circ F$ define um isomorfismo de espaços vectoriais

$$(\mathscr{E}^\vartheta)_{F(y)} = (\mathscr{E}_{F(y)})^\vartheta \simeq (\mathscr{E}_y)^\vartheta = (\mathscr{E}^\vartheta)_y$$

e, portanto,

$$(F^*\mathscr{E}^\vartheta)_y \simeq (\mathscr{E}^\vartheta)_y, \quad y \in \bar{\mathcal{A}}.$$

Dada a unicidade de $\mathscr{E}^\vartheta$, concluímos que existe um isomorfismo de sistemas locais

$$\phi \colon F^*\mathscr{E}^\vartheta \to \mathscr{E}^\vartheta.$$

Para qualquer $y \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$, temos $F(y) = y$, logo

$$(F^*\mathscr{E}^\vartheta)_y = (\mathscr{E}^\vartheta)_{F(y)} = (\mathscr{E}^\vartheta)_y$$

e, portanto, ϕ define um isomorfismo de espaços vectoriais

$$\phi_y \colon (\mathscr{E}^\vartheta)_y \to (\mathscr{E}^\vartheta)_y$$

que é dado pela correspondência $f \mapsto f \circ F$. Como $F(x) = x + y$ para todo $x \in L^{-1}(y)$, obtemos

$$(f \circ F)(x) = f(F(x)) = f(x + y) = \vartheta(y)f(x), \quad x \in L^{-1}(y),$$

logo

$$\phi_y(f) = \vartheta(y)f, \quad y \in \bar{A}(\mathbb{F}_q).$$

Finalmente, para cada $i \in \mathbb{Z}$, seja $\mathscr{H}^i(\mathscr{E}^\vartheta)$ o i-ésimo feixe cohomológico de $\mathscr{E}^\vartheta$. O isomorfismo $\phi\colon F^*\mathscr{E}^\vartheta \to \mathscr{E}^\vartheta$ induz um isomorfismo de feixes

$$\phi\colon \mathscr{H}^i(\mathscr{E}^\vartheta) \to \mathscr{H}^i(\mathscr{E}^\vartheta).$$

Para cada $y \in \bar{A}(\mathbb{F}_q)$, o germe $\mathscr{H}^i(\mathscr{E}^\vartheta)_b$ é um espaço vectorial sobre $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ e o morfismo $\phi\colon \mathscr{H}^i(\mathscr{E}^\vartheta) \to \mathscr{H}^i(\mathscr{E}^\vartheta)$ induz uma aplicação linear

$$\phi_y\colon \mathscr{H}^i(\mathscr{E}^\vartheta)_y \to \mathscr{H}^i(\mathscr{E}^\vartheta)_y.$$

Deste modo, para cada $i \in \mathbb{Z}$, podemos considerar o traço

$$\mathrm{tr}(\phi_y; \mathscr{H}^i(\mathscr{E}^\vartheta)_y) \in \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

desta aplicação linear. Então, definimos a função-traço $\mathrm{tr}_{\phi,\mathscr{E}^\vartheta}\colon \bar{A}(\mathbb{F}_q) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ por

$$\mathrm{tr}_{\phi,\mathscr{E}^\vartheta}(y) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \mathrm{tr}(\phi_y; \mathscr{H}^i(\mathscr{E}^\vartheta)_y), \quad y \in \bar{A}(\mathbb{F}_q).$$

Na nossa situação, temos

$$\mathscr{H}^i(\mathscr{E}^\vartheta) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq 0, \\ \mathscr{E}^\vartheta, & \text{se } i = 0, \end{cases}$$

de modo que

$$\mathrm{tr}_{\phi,\mathscr{E}^\vartheta}(y) = \mathrm{tr}(\phi_y; (\mathscr{E}^\vartheta)_y) = \vartheta(y), \quad y \in \bar{A}(\mathbb{F}_q).$$

Logo, $\mathrm{tr}_{\phi,\mathscr{E}^\vartheta} = \vartheta$ é um caracter linear de $\bar{A}(\mathbb{F}_q)$, o que prova a alínea (a) do resultado seguinte.

Teorema 4.4.1. *Na notação anterior, temos o seguinte:*

(a) Para qualquer caracter linear $\vartheta\colon \bar{A}(\mathbb{F}_q) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$, existem um feixe de caracteres $\mathscr{L}$ em $\bar{A}$ e um isomorfismo de feixes $\phi\colon (\mathrm{Fr}_q)^*\mathscr{L} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}$ tais que $\mathrm{tr}_{\phi,\mathscr{L}} = \vartheta$.

(b) *Se $\mathscr{L}$ for um feixe de caracteres em $\bar{\mathcal{A}}$ tal que $(\mathrm{Fr}_q)^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}$, então existe um único isomorfismo $\phi\colon (\mathrm{Fr}_q)^*\mathscr{L} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}$ tal que $\mathrm{tr}_{\phi,\mathscr{L}}$ é um caracter irredutível de $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$.*

(c) *Se $(\mathscr{L}, \phi)$ e $(\mathscr{L}', \phi')$ forem como na alínea anterior e $\mathrm{tr}_{\phi,\mathscr{L}} = \mathrm{tr}_{\phi',\mathscr{L}'}$, então $\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}'$.*

Demonstração. Pelo que vimos antes, para provar a alínea (a), falta justificar que, para qualquer $\vartheta \in \mathrm{Hom}(\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q), \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$, a multiplicação μ de $\bar{\mathcal{A}}$ define um isomorfismo de sistemas locais

$$\mu^*\mathscr{E}^\vartheta \simeq \mathscr{E}^\vartheta \boxtimes \mathscr{E}^\vartheta = (\mathrm{pr}_1)\mathscr{E}^\vartheta \otimes (\mathrm{pr}_2)^*\mathscr{E}^\vartheta.$$

Notemos que, tanto $\mu^*\mathscr{E}^\vartheta$, como $\mathscr{E}^\vartheta \boxtimes \mathscr{E}^\vartheta$, são feixes em $\bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{A}}$.

Sejam $x, y \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F})$ qualquer. Então,

$$(\mu^*\mathscr{E}^\vartheta)_{(x,y)} \simeq (\mathscr{E}^\vartheta)_{x+y} = (\mathscr{E}_{x+y})^\vartheta$$

e

$$(\mathscr{E}^\vartheta \boxtimes \mathscr{E}^\vartheta)_{(x,y)} \simeq (\mathscr{E}^\vartheta)_x \otimes (\mathscr{E}^\vartheta)_y = (\mathscr{E}_x)^\vartheta \otimes (\mathscr{E}_y)^\vartheta.$$

Temos

$$\mu(L^{-1}(x) \times L^{-1}(y)) \subseteq L^{-1}(x+y),$$

logo a correspondência $f \mapsto f \circ \mu$ define, de maneira natural, uma aplicação linear de $\mathscr{E}_{x+y}$ em $\mathscr{E}_x \otimes \mathscr{E}_y$ e, em particular, uma aplicação linear de $(\mathscr{E}_{x+y})^\vartheta$ em $\mathscr{E}_x \otimes \mathscr{E}_y$. Para quaisquer $a, b \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$ e qualquer $f \in (\mathscr{E}_{x+y})^\vartheta$, temos

$$((a, b) \cdot (f \circ \mu)) = \vartheta(a + b) = \vartheta(a)\vartheta(b)(f \circ \mu),$$

logo

$$f \circ \mu \in (\mathscr{E}_x \otimes \mathscr{E}_y)^{\vartheta\times\vartheta}$$

para todo $f \in (\mathscr{E}_{x+y})^\vartheta$; aqui, $\vartheta\times\vartheta$ é o caracter linear de $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)\times\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$ definido por $(\vartheta \times \vartheta)(a, b) = \vartheta(a)\vartheta(b)$ para quaisquer $a, b \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$. Como $(\mathscr{E}_x \otimes \mathscr{E}_y)^{\vartheta\times\vartheta}$ é naturalmente isomorfo a $(\mathscr{E}_x)^\vartheta \otimes (\mathscr{E}_y)^\vartheta$, concluímos que a correspondência $f \mapsto f \circ \mu$ induz um isomorfismo

$$(\mathscr{E}_{x+y})^\vartheta \simeq (\mathscr{E}_x)^\vartheta \otimes (\mathscr{E}_y)^\vartheta.$$

Logo, obtemos um isomorfismo

$$(\mu^*\mathscr{E}^\vartheta)_{(x,y)} \simeq (\mathscr{E}^\vartheta \boxtimes \mathscr{E}^\vartheta)_{(x,y)}$$

para quaisquer $x, y \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F})$. Por construção, estes isomorfismos nos germes, determinam (de maneira única) um isomorfismo de sistemas locais

$$\mu^*\mathscr{E}^\vartheta \simeq \mathscr{E}^\vartheta \boxtimes \mathscr{E}^\vartheta$$

e, portanto, $\mathscr{E}^\vartheta$ é um feixe de caracteres.

Para provar (b), seja $\mathscr{L}$ um feixe de caracteres em $\bar{\mathcal{A}}$ tal que $F^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}$ (onde $F = \mathrm{Fr}_q$) e seja $\phi\colon F^*\mathscr{L} \to \mathscr{L}$ um isomorfismo de feixes. Então, para cada $y \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F})$, obtemos um isomorfismo de espaços vectoriais

$$\phi_y\colon \mathscr{L}_{F(y)} \to \mathscr{L}_y$$

(porque $(F^*\mathscr{L})_y \simeq \mathscr{L}_{F(y)}$). Em particular, se $y \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$, temos $F(y) = y$ e, portanto, obtemos um isomorfismo $\phi_y\colon \mathscr{L}_y \to \mathscr{L}_y$. Como $\mathscr{L}$ é sistema local de dimensão 1, existe $\vartheta\colon \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ tal que

$$\phi_y = \vartheta(y)\mathrm{id}, \quad y \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q).$$

Em particular,

$$\phi_{x+y} = \vartheta(x+y)\mathrm{id}, \quad x, y \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q).$$

Por outro lado, fixando um isomorfismo $\gamma\colon \mu^*\mathscr{L} \to \mathscr{L} \boxtimes \mathscr{L}$, obtemos isomorfismos

$$\gamma_{x,y}\colon \mathscr{L}_{x+y} \to \mathscr{L}_y \otimes \mathscr{L}_y, \quad x, y \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}).$$

Como $(F \times F) \circ \mu = \mu \circ F$, o isomorfismo $\phi \otimes \phi\colon F^*\mathscr{L} \boxtimes F^*\mathscr{L} \to \mathscr{L} \boxtimes \mathscr{L}$ satisfaz

$$\gamma_{x,y} \circ \phi_{x+y} = (\phi_x \otimes \phi_y) \circ \gamma_{x,y}, \quad x, y \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q).$$

Como $\gamma_{x,y}$ é um isomorfismo de $\mathscr{L}_{x+y}$ em $\mathscr{L}_x \otimes \mathscr{L}_y$, concluímos que

$$\vartheta(x+y) = \vartheta(x)\vartheta(y), \quad x, y \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q),$$

logo ϑ é um caracter de $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$.

Provemos então que $\mathscr{L} \simeq \mathscr{E}^\vartheta$. Para isso, começamos por provar que $L^*\mathscr{L} \simeq L^*\mathscr{E}^\vartheta$. Aqui, consideramos L como um morfismo $\bar{\mathcal{A}}/\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q) \to \bar{\mathcal{A}}$, de modo que $L^*\mathscr{L}$ e $L^*\mathscr{E}^\vartheta$ são feixes em $\bar{\mathcal{A}}/\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$. (Notemos que este "esquema quociente" é afim e é isomorfo a $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q[\mathbf{x}]^{\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)})$ onde $\mathbb{F}_q[\mathbf{x}]^{\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)}$ é o anel dos polinómios que são $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$-invariantes; como $\bar{\mathcal{A}}$ é comutativo, $\bar{\mathcal{A}}/\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$ é um grupo algébrico afim com $(\bar{\mathcal{A}}/\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q))(\mathbb{F}) = \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F})/\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$.) Para qualquer $y \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F})$, temos

$$(L^*\mathscr{E}^\vartheta)_{y\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)} \simeq (\mathscr{E}^\vartheta)_{L(y)}$$

e, portanto, usando os isomorfismos anteriores, deduzimos que

$$\begin{aligned}(L^*\mathscr{E}^\vartheta)_{y\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)} &\simeq (\mathscr{E}^\vartheta)_{F(y)-y} \simeq (\mu^*\mathscr{E}^\vartheta)_{(F(y),-y)} \simeq (\mathscr{E}^\vartheta)_{F(y)} \otimes (\mathscr{E}^\vartheta)_{-y} \\ &\simeq (F^*\mathscr{E}^\vartheta)_y \otimes (\mathscr{E}^\vartheta)_{-y} \simeq (\mathscr{E}^\vartheta)_y \otimes (\mathscr{E}^\vartheta)_{-y} \simeq (\mathscr{E}^\vartheta)_y \otimes (\iota^*\mathscr{E}^\vartheta)_y\end{aligned}$$

onde $\iota\colon \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}}$ é a inversão. Pode verificar-se facilmente que

$$\iota^*\mathscr{E}^\vartheta \simeq \mathscr{E}^{\vartheta^{-1}}$$

onde ϑ^{-1} é o caracter de $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$ definido por $\vartheta^{-1}(a) = \vartheta(-a)$ para todo $a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$. Assim,

$$(\mathscr{E}^{\vartheta})_y \otimes (\iota^*\mathscr{E}^{\vartheta})_y \simeq (\mathscr{E}^{\vartheta})_y \otimes (\mathscr{E}^{\vartheta^{-1}})_y \simeq (\mathscr{E}^{\vartheta} \boxtimes \mathscr{E}^{\vartheta^{-1}})_{(y,y)} \simeq (\Delta^*(\mathscr{E}^{\vartheta} \boxtimes \mathscr{E}^{\vartheta^{-1}}))_y$$

onde $\Delta\colon \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}} \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathcal{A}}$ é o morfismo diagonal. Como

$$\Delta^*(\mathscr{E}^{\vartheta} \boxtimes \mathscr{E}^{\vartheta^{-1}}) \simeq \mathscr{E}^{\vartheta\vartheta^{-1}} = \mathscr{E}^1 \equiv \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

é o feixe constante, concluímos que

$$(L^*\mathscr{E}^{\vartheta})_{y\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)} = \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

para todo $y \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F})$, logo

$$L^*\mathscr{E}^{\vartheta} \equiv \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

é o feixe constante em $\bar{\mathcal{A}}/\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$.

Analogamente se prova que $L^*\mathscr{L} \equiv \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ também é o feixe constante $\bar{\mathcal{A}}/\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$, logo

$$L^*\mathscr{L} \equiv L^*\mathscr{E}^{\vartheta}.$$

Daqui, resulta que

$$\mathscr{L} \simeq L_*L^*\mathscr{L} \simeq L_*L^*\mathscr{E}^{\vartheta} \simeq \mathscr{E}^{\vartheta},$$

como se queria. Deste isomorfismo resulta obviamente que $\mathrm{tr}_{\phi,\mathscr{L}} = \mathrm{tr}_{\phi,\mathscr{E}^{\vartheta}} = \vartheta$ e isto termina a demonstração da alínea (b).

A alínea (c) é óbvia porque se tem

$$\mathscr{L} \simeq \mathscr{E}^{\vartheta} \quad \text{e} \quad \mathscr{L}' \simeq \mathscr{E}^{\vartheta'}$$

para alguns $\vartheta, \vartheta' \in \mathrm{Hom}(\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q), \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$. A hipótese sobre o traço implica que $\vartheta = \vartheta'$. □

Denotemos por $\mathrm{CS}^{\mathrm{Fr}_q}(\bar{\mathcal{A}})$ a colecção

$$\mathrm{CS}^{\mathrm{Fr}_q} = \{\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}}) \mid (\mathrm{Fr}_q)^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}\}$$

doe feixes de caracteres em $\bar{\mathcal{A}}$ que são fixos pelo morfismo de Frobenius $\mathrm{Fr}_q\colon \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}}$. O teorema anterior garante que existe uma bijecção entre as classes de isomorfismo dos feixes de caracteres pertencentes a $\mathrm{CS}^{\mathrm{Fr}_q}(\bar{\mathcal{A}})$ e os caracteres irredutíveis de $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_q)$. Da mesma forma, para qualquer $r \in \mathbb{N}$, podemos considerar o morfismo de Frobenius $\mathrm{Fr}_{q^r}\colon \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}}$ e a colecção

$\mathrm{CS}^{\mathrm{Fr}_{q^r}}(\bar{\mathcal{A}})$, pelo que também obtemos uma bijecção entre as classes de isomorfismo dos feixes de caracteres pertencentes a $\mathrm{CS}^{\mathrm{Fr}_{q^r}}(\bar{\mathcal{A}})$ e os caracteres irredutíveis de $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_{q^r})$. Sabemos ainda que, para qualquer $r, s \in \mathbb{N}$ com $r \mid s$, os caracteres irredutíveis de $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_{q^r})$ podem ser obtidos a partir dos caracteres irredutíveis de $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_{q^s})$ por meio da aplicação-traço $\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_{q^r}} : \mathcal{A}(\mathbb{F}) \to \mathcal{A}(\mathbb{F})$. Logo, é de esperar que exista uma correspondência

$$\mathrm{CS}^{\mathrm{Fr}_{q^s}}(\bar{\mathcal{A}}) \to \mathrm{CS}^{\mathrm{Fr}_{q^r}}(\bar{\mathcal{A}})$$

que seja compatível com a correspondência entre caracteres e que permita obter os feixes de caracteres em $\mathrm{CS}^{\mathrm{Fr}_{q^r}}(\bar{\mathcal{A}})$ a partir dos feixes de caracteres em $\mathrm{CS}^{\mathrm{Fr}_{q^s}}(\bar{\mathcal{A}})$. Esta correspondência existe e é dada por como se indica na definição de Boyarchenko-Drinfeld.

Podemos, por isso, enunciar o seguinte:

Teorema 4.4.2. *Na notação anterior, a correspondência $\mathscr{L} \mapsto \mathrm{tr}_{\mathscr{L}}$ define uma bijecção entre as classe de isomorfismo dos feixes de caracteres em $\bar{A}$ e o grupo dual $\widehat{A}(\mathbb{F})$. Esta bijecção é um isomorfismo de grupos com respeito ao produto tensorial de feixes de caracteres.*

Capítulo 5

Feixes de Supercaracteres

Neste capítulo, definimos a noção de feixe de supercaracteres no contexto dos grupos-álgebra afins definidos sobre o corpo finito $\mathbb{F}_q$. Consideramos uma $\mathbb{F}_q$-álgebra nilpotente A de dimensão finita e o grupo-álgebra $G = 1 + A$ que lhe está associado. Como nos capítulos anteriores, consideramos um conjunto $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de indeterminadas sobre $\mathbb{F}_q$, onde n é a dimensão de A, e o $\mathbb{F}_q$-esquema

$$\mathscr{G} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q[\mathbf{x}])$$

com a estrutura de grupo algébrico como na secção 3.2. As operações de $\bar{\mathcal{G}}$ são denotadas por $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\iota}$ e ε, enquanto que as operações de $\bar{\mathcal{A}}$ são denotadas por μ, ι e ε. Mantemos a notação dos capítulos 3 e 4. Em particular, $\mathbb{F}$ denota o fecho algébrico de $\mathbb{F}_q$ e, para cada $r \in \mathbb{N}$, consideramos o corpo finito $\mathbb{F}_{q^r}$ como uma extensão de $\mathbb{F}_q$ e como um subcorpo de $\mathbb{F}$.

Por outro lado, voltamos a fixar um número primo $\ell \neq p$ e escolhemos um fecho algébrico $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ do corpo $\mathbb{Q}_\ell$. Neste capítulo, vamos estar interessados nas representações do grupo (finito) G sobre $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Queremos definir certos objectos geométricos (os feixes de supercaracteres) sobre o grupo algébrico $\bar{\mathcal{G}} = \mathscr{G} \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ a partir dos quais os supercaracteres dos grupos finitos

$$\mathscr{G}(\mathbb{F}_{q^r}) \simeq 1 + (A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r}), \quad r \in \mathbb{N},$$

possam ser obtidos por um processo uniforme (independente de r). Mais concretamente, procuramos uma definição apropriada, de modo a que sejam válidos resultados análogos aos teoremas 4.4.1 e 4.4.2. A razão de procurarmos "superrepresentações" deve-se à dificuldade de determinar as representações irredutíveis de grupos-álgebra (como já referimos este problema é "selvagem"). Tal como se espera (pelo capítulo 1), iremos definir um feixe de supercaracteres para $\bar{G}$ a partir dos feixes de caracteres para o grupo abeliano $\bar{\mathcal{A}}$.

5.1 Acções de $\bar{\mathcal{G}}$ em $\bar{\mathcal{A}}$

Começamos, por definir acções do grupo algébrico $\bar{\mathcal{G}}$ sobre o grupo algébrico $\bar{\mathcal{A}}$ que correspondam à acção de G sobre A por multiplicação à esquerda.

Consideramos o morfismo de esquemas

$$\nu\colon \bar{\mathcal{G}} \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}}$$

que corresponde à multiplicação $\nu\colon \bar{\mathcal{A}} \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}}$ em $\bar{\mathcal{A}}$ como definimos na secção 3.2 (relembremos que $\mathscr{G} = \mathcal{A} = \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_q[\mathbf{x}])$). Nos conjuntos dos pontos fechados, este morfismo induz a aplicação

$$\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}) \times \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}) \to \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}), \quad (g, a) \mapsto ga,$$

que também denotamos por ν e que corresponde à multiplicação à esquerda. Para cada $g \in \bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F})$, definimos $\nu_g\colon \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}) \to \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F})$ por

$$\nu_g(a) = \nu(g, a) = ga, \quad a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}).$$

Esta aplicação corresponde também a um morfismo de esquemas $\nu_g\colon \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}}$.

Por outro lado, definimos o morfismo de esquemas $\boldsymbol{\nu}\colon \bar{\mathcal{G}} \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}}$ por

$$\boldsymbol{\nu} = \mu \circ (\nu \times \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \times \Delta),$$

onde $\Delta\colon \bar{\mathcal{A}} \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}}$ é o morfismo diagonal. Este morfismo induz a aplicação

$$\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}) \times \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}) \to \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}), \quad (g, a) \mapsto ga + a = a + ga,$$

que também denotamos por $\boldsymbol{\nu}$ (e que corresponde à "multiplicação 'a esquerda" por $1 + g$). Para cada $g \in \bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F})$, definimos $\boldsymbol{\nu}_g\colon \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}) \to \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F})$ por

$$\boldsymbol{\nu}_g(a) = \nu(g, a) = a + ga, \quad a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}).$$

Esta aplicação corresponde também a um morfismo de esquemas $\boldsymbol{\nu}_g\colon \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}}$.

Lema 5.1.1. *Na notação acima, para qualquer $g \in \mathscr{G}(\mathbb{F})$, as aplicações ν_g e $\boldsymbol{\nu}_g$ são $\mathbb{F}_q$-morfismos e*

$$\boldsymbol{\nu}_g = \mu \circ (\nu_g \times \mathrm{id}) \circ \Delta \quad e \quad \nu_g = \mu \circ (\boldsymbol{\nu}_g \times \iota) \circ \Delta.$$

Demonstração. Como ν_g corresponde à multiplicação à esquerda, é um $\mathbb{F}_q$-morfismo.

Para qualquer $a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F})$, temos:

$$\begin{aligned}(\mu \circ (\nu_g \times \mathrm{id}) \circ \Delta)(a) &= (\mu \circ (\nu_g \times \mathrm{id})(a, a) = \mu(ga, a)\\ &= a + ga = \boldsymbol{\nu}_g(a)\end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned}(\mu \circ (\boldsymbol{\nu}_g \times \iota) \circ \Delta)(a) &= (\mu \circ (\boldsymbol{\nu}_g \times \iota)(a, a) = \mu(a + ga, -a)\\ &= a + ga - a = ga = \nu_g(a).\end{aligned}$$

Logo, como a composição de $\mathbb{F}_q$-morfismos é um $\mathbb{F}_q$-morfismos, concluímos que $\boldsymbol{\nu}_g$ é um $\mathbb{F}_q$-morfismo. □

5.2 Acções nos feixes de caracteres de $\bar{\mathcal{A}}$

Como antes, denotamos por $\mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$ o conjunto dos feixes de caracteres de $\bar{\mathcal{A}}$. Começamos por definir uma acção de $\bar{\mathcal{G}}$ em $\bar{\mathcal{A}}$.

Lema 5.2.1. *Para quaisquer $g \in \mathscr{G}(\mathbb{F})$ e $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$, temos*

$$(\nu_g)^*\mathscr{L}, (\boldsymbol{\nu}_g)^*\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}}).$$

Demonstração. Como $\nu_g \circ \mu = \mu \circ (\nu_g \times \nu_g)$, temos

$$\mu^*(\nu)^* = ((\nu_g \otimes \nu_g)^*)\mu^* = ((\nu_g)^* \otimes (\nu_g)^*)\mu^*$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\mu^*((\nu_g)^*\mathscr{L}) &\simeq ((\nu_g)^* \otimes (\nu_g)^*)\mu^*\mathscr{L}\\ &\simeq ((\nu_g)^* \otimes (\nu_g)^*)(\mathscr{L} \boxtimes \mathscr{L})\\ &\simeq (\nu_g)^*\mathscr{L} \boxtimes (\nu_g)^*\mathscr{L},\end{aligned}$$

o que prova que $(\nu_g)^*\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$.

Analogamente, se prova que $(\boldsymbol{\nu}_g)^*\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$. □

Referimos agora o seguinte resultado (que é conhecido pela *correspondência feixes-funções* de Grothendieck).

Teorema 5.2.2. *Sejam X e Y $\mathbb{F}_q$-esquemas do tipo finito e $\phi\colon X \to Y$ um morfismo de $\mathbb{F}_q$-esquemas. Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos por Fr_{q^n} (definido, tanto em $X \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$, como em $Y \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$. Então, na notação da definição 4.2.1, temos:*

- *Se* $\mathscr{F} \in \mathbf{D}^b_c(Y \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F})$ *for tal que* $(\mathrm{Fr}_{q^n})\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}$*, então*

$$t_{n,\phi^*\mathscr{F}} = t_{n,\mathscr{F}} \circ \phi.$$

- *Se* ϕ *for um morfismo separado e* $\mathscr{F} \in \mathbf{D}^b_c(X \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F})$ *for tal que* $(\mathrm{Fr}_{q^n})\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}$*, então*

$$t_{n,\phi_!\mathscr{F}}(y) = \sum_{x \in \phi^{-1}(y)} t_{n,\mathscr{F}}(x), \quad y \in (Y \times_{fq} \mathbb{F})(\mathbb{F}_{q^n}).$$

- *Se* $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathbf{D}^b_c(Y \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F})$ *forem tais que* $(\mathrm{Fr}_{q^n})\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}$ *e* $(\mathrm{Fr}_{q^n})\mathscr{G} \simeq \mathscr{G}$*, então*

$$t_{n,\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}} = t_{n,\mathscr{F}} \cdot t_{n,\mathscr{G}}.$$

Deste teorema, concluímos que, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $g \in \bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})$ e $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$ tal que $\mathrm{Fr}_{q^n} \mathscr{L} \simeq \mathscr{L}$, se tem

- $t_{n,(\nu_g)^*\mathscr{L}}(a) = (t_{n,\mathscr{L}} \circ \nu_g)(a) = t_{n,\mathscr{L}}(ga), \quad a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_{q^n});$
- $t_{n,(\boldsymbol{\nu}_g)^*\mathscr{L}}(a) = (t_{n,\mathscr{L}} \circ \boldsymbol{\nu}_g)(a) = t_{n,\mathscr{L}}(a + ga), \quad a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_{q^n}).$

Logo, as acções $\mathscr{L} \mapsto (\nu_g)^*\mathscr{L}$ e $\mathscr{L} \mapsto (\boldsymbol{\nu}_g)^*\mathscr{L}$ nos feixes de caracteres conrespondem ás acções definidas nos caracteres irredutíveis de $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_{q^n})$ (como no capítulo 1).

Agora, para qualquer $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$, definimos o estabilizador $E_{\mathscr{L}}$ como sendo o subesquema de $\mathscr{G}$ tal que

$$E_{\mathscr{L}}(\mathscr{F}) = \{g \in \bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}) \mid (\boldsymbol{\nu}_g)^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}\}.$$

Então, $E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$ é o conjunto dos pontos fechados de um $\mathbb{F}_q$-esquema $E_{\mathscr{L}}$ que é isomorfo a um subesquema de $\bar{\mathcal{G}}$. De facto, o esquema $E_{\mathscr{L}}$ é univocamente determinado (a menos de isomorfismo) pelo isomorfismo de $\mathbb{F}_q$-álgebras

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Spec}(R), E_{\mathscr{L}}) \simeq E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F}_q) \otimes_{\mathbb{F}_q} R$$

para qualquer $\mathbb{F}_q$álgebra comutativa R.

Repare-se também que, dado qualquer elemento $g \in E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F}_{q^n})$, se $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$ for tal que $\mathrm{Fr}_{q^n} \mathscr{L} \simeq \mathscr{L}$, então

$$t_{n,(\boldsymbol{\nu}_g)^*\mathscr{L}}(a) = t_{n,\mathscr{L}}(a), \quad a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_{q^n}),$$

e, portanto, g pertence ao estabilizador $L_{t_{n,\mathscr{L}}}$ como definimos no Capítulo 1. Na realidade, temos uma equivalência.

Lema 5.2.3. *Se* $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$ *for tal que* $\mathrm{Fr}_{q^n} \mathscr{L} \simeq \mathscr{L}$*, então* $E_{\mathscr{L}}$ *é um subgrupo de* $\bar{\mathcal{G}}$ *e* $E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F}_{q^n}) = L_{t_{n,\mathscr{L}}}$ *é o estabilizador em* $\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})$ *do caracter linear* $t_{n,\mathscr{L}}$ *de* $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_{q^n})$*.*

Demonstração. A identidade pertence trivialmente a $E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$. Se $g, h \in E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$, então

$$(\boldsymbol{\nu}_{gh})^* \mathscr{L} = (\boldsymbol{\nu}_g \boldsymbol{\nu}_h)^* \mathscr{L} \simeq (\boldsymbol{\nu}_h)^* (\boldsymbol{\nu}_g)^* \mathscr{L} \simeq (\boldsymbol{\nu}_h)^* \mathscr{L} \simeq \mathscr{L},$$

logo $gh \in E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$.

Para os inversos, seja $g \in E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$. Então, $(\boldsymbol{\nu}_g)^* \mathscr{L} \simeq \mathscr{L}$ e, portanto,

$$(\boldsymbol{\nu}_{g^{-1}})^* \mathscr{L} \simeq (\boldsymbol{\nu}_{g^{-1}})^* (\boldsymbol{\nu}_g)^* \mathscr{L} \simeq \mathscr{L}.$$

Logo, $g^{-1} \in E_{\mathcal{L}}$, provando que $E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$ é um subgrupo de $\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F})$.

Agora, provemos que $E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F}_{q^n}) = L_{t_{n,\mathscr{L}}}$. Seja $g \in E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F}_{q^n})$. Como $E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F}_{q^n})$ é subgrupo, temos $g^{-1} \in E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F}_{q^n})$, logo $(\nu_{g^{-1}})\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}$ e, portanto,

$$(g \cdot t_{n,\mathscr{L}}(a) = t_{n,\mathscr{L}}(g^{-1}a) = (t_{n,\mathscr{L}} \circ \boldsymbol{\nu}_{g^{-1}})(a) = t_{n,(\boldsymbol{\nu}_{g^{-1}})^* \mathscr{L}}(a) = t_{n,\mathscr{L}}(a)$$

para todo $a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_{q^n})$. Assim, $g \in L_{t_{n,\mathscr{L}}}$.

Para a inclusão recíproca, seja $g \in L_{t_{n,\mathscr{L}}}$. Então, para qualquer $a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_{q^n})$, temos

$$t_{n,\mathscr{L}}(a) = (g \cdot t_{n,\mathscr{L}})(a) = t_{n,\mathscr{L}}(g^{-1}a) = t_{n,(\boldsymbol{\nu}_{g^{-1}})^* \mathscr{L}}(a)$$

e, portanto,

$$t_{n,\mathscr{L}} = t_{n,(\boldsymbol{\nu}_{g^{-1}})^* \mathscr{L}}.$$

Pelo teorema 4.4.1, concluímos que $\mathscr{L} \simeq (\boldsymbol{\nu}_{g^{-1}})^* \mathscr{L}$, logo $g^{-1} \in E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F}_{q^n})$. □

Vejamos agora que $E_{\mathscr{L}}$ também é um grupo-álgebra, ou seja, que está associado a uma $\mathbb{F}$-álgebra. Para isso, para qualquer $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$, definimos

$$\mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{F}) = \{a \in \bar{\mathcal{A}} \mid (\nu_g)^* \mathscr{L} \simeq (\nu_0)^* \mathscr{L}\}.$$

Como no caso anterior, $\mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$ é o conjunto dos pontos fechados de um $\mathbb{F}_q$-esquema $\mathcal{E}_{\mathscr{L}}$ que é isomorfo a um subesquema de $\bar{\mathcal{A}}$. De facto, o esquema $\mathcal{E}_{\mathscr{L}}$ é univocamente determinado (a menos de isomorfismo) pelo isomorfismo de $\mathbb{F}_q$-álgebras

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Spec}(R), \mathcal{E}_{\mathscr{L}}) \simeq \mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{F}_q) \otimes_{\mathbb{F}_q} R$$

para qualquer $\mathbb{F}_q$álgebra comutativa R. De seguida, verificamos que, como esquemas, se tem $\mathcal{E}_{\mathscr{L}} \simeq E_{\mathscr{L}}$. Relembremos que, como esquemas, $\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{A}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q[\mathbf{x}])$ e que a multiplicação em $\mathscr{G}$ é dada pela composição

$$\bar{\mathcal{A}} \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathcal{A}} \xrightarrow{(\mu,\nu)} \bar{\mathcal{A}} \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathcal{A}} \xrightarrow{\mu} \bar{\mathcal{A}}$$

ou seja, $\boldsymbol{\mu} = \mu \circ (\mu, \nu)$ (o que, no conjunto dos pontos fechados, corresponde a $(a, b) \mapsto a + b + ab$).

Lema 5.2.4. *Seja $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$. Então, existe um isomorfismo de $\mathbb{F}_q$-esquemas $\mathcal{E}_{\mathscr{L}} \simeq E_{\mathscr{L}}$.*

Demonstração. Provamos que, para qualquer $a \in \mathcal{A}(\mathbb{F})$, se tem

$$(\boldsymbol{\nu}_a)^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L} \iff (\nu_a)^*\mathscr{L} \simeq (\nu_0)^*\mathscr{L}.$$

Por um lado, seja $a \in \mathcal{E}_{\mathscr{L}}$. Pelo lema 5.1.1, temos

$$\boldsymbol{\nu}_a = \mu \circ (\nu_a \times \mathrm{id}) \circ \Delta,$$

logo

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nu}_a)^*\mathscr{L} &= (\mu \circ (\nu_a \times \mathrm{id}) \circ \Delta)^*\mathscr{L} \simeq \Delta^*((\nu_a)^* \times \mathrm{id}^*)\mu^*\mathscr{L} \\
&\simeq \Delta^*((\nu_a)^* \times \mathrm{id}^*)(\mathscr{L} \boxtimes \mathscr{L}) \simeq \Delta^*((\nu_a)^*\mathscr{L} \boxtimes \mathrm{id}^*\mathscr{L}) \\
&\simeq \Delta^*((\nu_0)^*\mathscr{L} \boxtimes \mathscr{L}) \simeq \Delta^*((\nu_0)^* \times \mathrm{id}^*)(\mathscr{L} \boxtimes \mathscr{L}) \\
&\simeq \Delta^*((\nu_0)^* \times \mathrm{id}^*)\mu^*\mathscr{L} \simeq (\mu \circ (\nu_0 \times \mathrm{id}) \circ \Delta)^*\mathscr{L} \\
&\simeq (\boldsymbol{\nu}_0)^*\mathscr{L} = \mathrm{id}^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, seja $g \in E_{\mathscr{L}}$ e vejamos que $(\nu_g)^*\mathscr{L} \simeq (\nu_0)^*\mathscr{L}$. Neste caso, temos

$$\nu_g = \mu \circ (\boldsymbol{\nu}_g \times \iota) \circ \Delta,$$

logo

$$\begin{aligned}
(\nu_g)^*\mathscr{L} &= \Delta^*((\boldsymbol{\nu}_g)^* \times \iota^*)\mu^*\mathscr{L} \simeq \Delta^*((\boldsymbol{\nu}_g)^*\mathscr{L} \times \iota^*\mathscr{L}) \\
&\simeq \Delta^*(\mathscr{L} \boxtimes \iota^*\mathscr{L}) \simeq \Delta^*(\mathrm{id}^*\mathscr{L} \boxtimes \iota^*\mathscr{L}) \simeq \Delta^*(\mathrm{id}^* \times \iota^*)(\mathscr{L} \boxtimes \mathscr{L}) \\
&\simeq \Delta^*(\mathrm{id}^* \times \iota^*)\mu^*\mathscr{L} \simeq (\mu \circ (\mathrm{id} \times \iota) \circ \Delta)^*\mathscr{L} \simeq (\nu_0)^*\mathscr{L},
\end{aligned}$$

o que termina a demonstração. □

Vejamos agora que $(\mathcal{E}_{\mathscr{L}}, \mu, \iota, \varepsilon)$ é um grupo algébrico abeliano (de modo que, para cada $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$, podemos definir a colecção $\mathrm{CS}(\mathcal{E}_{\mathscr{L}})$ dos feixes de caracteres em $\mathcal{E}_{\mathscr{L}}$).

Lema 5.2.5. *Seja $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$. Então, $\mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$ é uma $\mathbb{F}$-subálgebra de $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F})$ e existe um isomorfismo de grupos*

$$E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F}) \simeq 1 + \mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{F}).$$

Em particular, $\mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$ é um subgrupo de $\bar{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{E}_{\mathscr{L}}$ é um grupo algébrico abeliano.

Demonstração. Para quaisquer $a, b \in \mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$, temos $\nu_{a+b} = \mu \circ (\nu_a \times \nu_b) \circ \Delta$, logo

$$\begin{aligned}(\nu_{a+b})^*\mathscr{L} &\simeq \Delta^*((\boldsymbol{\nu}_a)^* \times (\boldsymbol{\nu}_b)^*)\mu^*\mathscr{L} \simeq \Delta^*((\boldsymbol{\nu}_a)^*\mathscr{L} \boxtimes (\boldsymbol{\nu}_b)^*\mathscr{L}) \\ &\simeq \Delta^*((\boldsymbol{\nu}_0)^*\mathscr{L} \boxtimes (\boldsymbol{\nu}_0)^*\mathscr{L}) \simeq \Delta^*((\boldsymbol{\nu}_0)^* \times (\boldsymbol{\nu}_0)^*)\mu^*\mathscr{L} \\ &\simeq (\boldsymbol{\nu}_0)^*\mathscr{L}.\end{aligned}$$

Assim, $a + b \in \mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$.

Para provar que $\mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$ é fechado para simétricos, seja $a \in \mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$ e notemos que $\iota \circ \nu_a = \nu_a \circ \iota = \nu_{-a}$. Então,

$$(\nu_{\iota(a)})^*\mathscr{L} \simeq \iota^*(\nu_a)^*\mathscr{L} \simeq \iota^*(\nu_0)^*\mathscr{L} \simeq (\nu_a \circ \iota)^*\mathscr{L} \simeq (\nu_0)^*\mathscr{L}$$

e, portanto, $-a \in \mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$.

Por outro lado, como $\mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathscr{F}) = E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$, temos

$$a + b + ab = \boldsymbol{\mu}(a, b) \in E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$$

para todos $a, b \in \mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$ e, portanto,

$$ab = \boldsymbol{\mu}(a, b) - (a + b) \in \mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$$

para todos $a, b \in \mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$. Isto termina a demonstração. □

Como no caso da teoria de supercaracteres, a restrição de um feixe de caracteres $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$ ao subgrupo $\mathcal{E}_{\mathscr{L}}$ define, por meio da função-traço, um caracter linear do subgrupo $E_{\mathscr{L}}$ de $\mathscr{G}$. Comecemos por notar que qualquer feixe de caracteres em $\bar{\mathcal{A}}$ é, também um sistema local em $\bar{\mathcal{G}}$ (porque, de facto, $\bar{\mathcal{G}}$ e $\bar{\mathcal{A}}$ só diferem na estrutura algébrica). De agora em diante, denotamos por $\mathbf{c}\colon \bar{\mathcal{G}} \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathcal{G}} \to \bar{\mathcal{G}}$ o morfismo de conjugação, que é definido no conjunto dos pontos fechados por

$$\mathbf{c}(g, h) = \boldsymbol{\mu}(gh, g^{-1}) = ghg^{-1}$$

para todos $g, h \in \mathscr{G}(\mathbb{F})$.

Proposição 5.2.6. *Sejam $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$ e $E = E_{\mathscr{L}}$. Seja $\mathscr{L}_E = (i_E)^*\mathscr{L}$ onde $i_E\colon E \to \bar{\mathcal{G}}$ é o morfismo de inclusão. Então,*

(a) $\boldsymbol{\mu}^*\mathscr{L}_E \simeq \mu^*\mathscr{L}_E \simeq \mathscr{L}_E \boxtimes \mathscr{L}_E$.

(b) Se $\mathbf{c}\colon E \times_{\mathbb{F}_q} E \to E$ for o morfismo de conjugação e $\mathrm{pr}_2\colon E \times_{\mathbb{F}_q} E \to E$ for a projecção na segunda componente, então $\mathbf{c}^*\mathscr{L}_E \simeq (\mathrm{pr}_2)^*\mathscr{L}_E$.

(c) *Se $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$ for tal que $\mathrm{Fr}_{q^n} \mathscr{L}_E \simeq \mathscr{L}_E$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então a função-traço $t_{n,\mathscr{L}_E} \colon E(\mathbb{F}_{q^n}) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ é um caracter linear de $E(\mathbb{F}_{q^n})$.*

Demonstração. Seja $\mathbf{0} \colon \mathscr{E} \times_{\mathbb{F}_q} \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ o morfismo nulo (isto é, $\mathbf{0}(a,b) = 0$ para todos $a, b \in \mathscr{E}(\mathbb{F})$. Provemos que $\nu^* \mathscr{L}_E \simeq \mathbf{0}^* \mathscr{L}_E$. Para isto, basta verificar que os dois sistemas locais têm germes isomorfos. Ora, para quaisquer $a, b \in \mathscr{E}(\mathbb{F})$, temos obviamente $(\mathbf{0}^* \mathscr{L}_E)_{(a,b)} \simeq \mathscr{L}_0$, enquanto que

$$(\nu^* \mathscr{L}_E)_{(a,b)} \simeq \mathscr{L}_{\nu(a,b)} \simeq \mathscr{L}_{\nu_a(b)} \simeq ((\nu_a)^* \mathscr{L})_b \simeq ((\nu_0)^* \mathscr{L})_b \simeq \mathscr{L}_{\nu_0(b)} = \mathscr{L}_0.$$

Agora, como $\boldsymbol{\mu} = \mu \circ (\mu \times \nu) \circ \Delta$, vem

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}^* \mathscr{L}_E &\simeq \Delta^*(\mu^* \otimes \nu^*)(\mu^* \mathscr{L}_E) \simeq \Delta^*(\mu^* \otimes \nu^*)(\mathscr{L}_E \boxtimes \mathscr{L}_E) \\
&\simeq \Delta^*(\mu^* \mathscr{L}_E \boxtimes \nu^* \mathscr{L}_E) \simeq \Delta^*(\mu^* \mathscr{L}_E \otimes \mathbf{0}^* \mathscr{L}_E) \\
&\simeq \Delta^*(\mu^* \otimes \mathbf{0}^*)(\mathscr{L}_E \boxtimes \mathscr{L}_E) \simeq \Delta^*(\mu^* \otimes \mathbf{0}^*) \mu^* \mathscr{L}_E.
\end{aligned}$$

Como $\mu \circ (\mu \times \mathbf{0}) \circ \Delta = \mu$, concluímos que

$$\boldsymbol{\mu}^* \mathscr{L}_E \simeq \mu^* \mathscr{L}_E \simeq \mathscr{L}_E \boxtimes \mathscr{L}_E$$

(porque $\mathscr{L}_E$ é feixe de caracteres em $\mathscr{E}$).

Para (b), consideremos o morfismo $\sigma \colon \bar{\mathcal{A}} \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}} \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathcal{A}}$ definido por

$$\sigma(a,b) = (b,a), \quad g, h \in \bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}).$$

Como $\bar{\mathcal{A}}$ é comutativo, temos $\mu \circ \sigma = \mu$ e, portanto,

$$\boldsymbol{\mu}^* \mathscr{L}_E \simeq \mu^* \mathscr{L}_E = (\mu^* \circ \sigma)^* \mathscr{L}_E \simeq \sigma^* \mu^* \mathscr{L}_E \simeq \sigma^* \boldsymbol{\mu}^* \mathscr{L}_E.$$

Daqui, resulta que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{c}^* \mathscr{L}_E)_{(g,h)} &\simeq (\mathscr{L}_E)_{ghg^{-1}} \simeq (\boldsymbol{\mu}^* \mathscr{L}_E)_{(gh,g^{-1})} \simeq (\sigma^* \boldsymbol{\mu}^* \mathscr{L}_E)_{(gh,g^{-1})} \\
&\simeq (\boldsymbol{\mu}^* \mathscr{L}_E)_{\sigma(gh,g^{-1})} \simeq (\boldsymbol{\mu}^* \mathscr{L}_E)_{(g^{-1},gh)} \simeq (\mathscr{L}_E)_{g^{-1}gh} \\
&= (\mathscr{L}_E)_h = (\mathscr{L}_E)_{\mathrm{pr}_2(g,h)} \simeq ((\mathrm{pr}_2)^* \mathscr{L}_E)_{(g,h)}
\end{aligned}$$

para todos $g, h \in E_{\mathscr{L}}(\mathbb{F})$, logo $\mathbf{c}^* \mathscr{L}_E \simeq (\mathrm{pr}_2)^* \mathscr{L}_E$.

Para (c), sejam $g, h \in E_{\mathscr{L}}$. Então,

$$\begin{aligned}
t_{n,\mathscr{L}_E}(gh) &= t_{n,\boldsymbol{\mu}^* \mathscr{L}_E}(g,h) = (t_{n,\mu^* \mathscr{L}_E}(g,h) \\
&= t_{n,\mathscr{L}_E}(g+h) = t_{n,\mathscr{L}_E}(g) t_{n,\mathscr{L}_E}(h)
\end{aligned}$$

e, portanto, $t_{n,\mathscr{L}_E}$ define um caracter linear de $\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})$. $\square$

5.3 Feixes de supercaracteres

Relembremos a indução de caracteres de grupos finitos. Se G for um grupo finito, H um subgrupo de G e $\vartheta\colon \bar{\mathbb{Q}}_\ell \to$ um caracter de H, então o *caracter induzido* $\vartheta^G\colon G \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ é definida por

$$\vartheta^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in G}\vartheta^\circ(h^{-1}gh), \quad g \in G$$

onde, para qualquer $x \in G$, se tem $\vartheta^\circ(x) = \vartheta(x)$, se $x \in H$, e $\vartheta^\circ(x) = 0$, se $x \notin H$. Esta fórmula pode ser escrita da maneira que se segue.

Lema 5.3.1. *Sejam G um grupo finito, H um subgrupo de G e ϑ um caracter de H. Seja $s\colon G/H \to G$ uma secção para o epimorfismo canónico $G \to G/H$ (isto é, uma aplicação tal que $\{s(gH) \mid g \in G\}$ é um conjunto completo de representantes das classes laterais de H em G) e definamos a aplicação $F\colon G/H \times H \to G$ por*

$$F(gH, h) = s(gH)h(s(gH)^{-1}, \quad g, h \in G.$$

Então,

$$\vartheta^G(g) = \sum_{(kG,h)\in F^{-1}(g)}\vartheta(h)$$

para qualquer $g \in G$.

Demonstração. Seja $g \in G$. Pondo $\{s(kH) \mid k \in G\} = \{k_1, \ldots, k_r$, temos

$$\vartheta^G(g) = \sum_{1\leq i\leq n}\vartheta^\circ({k_i}^{-1}gk_i) = \sum_{kH\in G/H}\vartheta^\circ(s(kH)^{-1}gs(kH).$$

Como

$$\vartheta^\circ(x) = \sum_{h\in H}\delta_{x,h}\vartheta(x), \quad x \in G,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\vartheta^G(g) &= \sum_{kH\in G/H}\sum_{h\in H}\delta_{g,s(kH)hs(kH)^{-1}}\vartheta(s(kH)^{-1}hs(kH))\\ &= \sum_{(kH,h)\in G/H\times H}\delta_{g,s(kH)hs(kH)^{-1}}\vartheta(s(kH)^{-1}hs(kH))\\ &= \sum_{(kH,h)\in F^{-1}(g)}\delta_{g,s(kH)hs(kH)^{-1}}\vartheta(s(kH)^{-1}hs(kH)).\end{aligned}$$

Como

$$(kH,h) \in F^{-1}(g) \iff g = s(kH)hs(kK)^{-1} \iff h = s(kH)^{-1}gs(kH),$$

concluímos que

$$\vartheta^G(g) = \sum_{(kH,h)\in F^{-1}(g)} \vartheta(h)$$

como queríamos. □

Definamos agora a indução de feixes de caracteres.

Proposição 5.3.2. *Sejam $\bar{\mathcal{G}}$ e $\bar{\mathcal{A}}$ como antes. Sejam $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$ tal que $(\mathrm{Fr}_{q^n})^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Ponhamos $E = E_{\mathscr{L}}$ e $\mathscr{L}_E = (i_E)^*\mathscr{L}$ onde $i_E \colon E \to \bar{\mathcal{G}}$ é o morfismo de inclusão. Sejam $s\colon \bar{\mathcal{G}}/E \to \bar{\mathcal{G}}$ uma secção para o epimorfismo canónico e $\mathrm{pr}_2\colon \bar{\mathcal{G}} \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathcal{G}} \to \bar{\mathcal{G}}$ a projecção na segunda componente. Consideremos o morfismo de esquemas $F\colon \bar{\mathcal{G}}/E \times_{\mathbb{F}_q} E \to \bar{\mathcal{G}}$ por*

$$F(gE,h) = s(gH)hs(gH)^{-1}, \quad g,h \in G,$$

e definamos o feixe

$$\mathscr{S} = F_!(\mathrm{pr}_2)^*\mathscr{L}_E$$

em $\mathscr{G}$. Então, $(\mathrm{Fr}_{q^n})^*\mathscr{S} \simeq \mathscr{S}$ e temos

$$t_{n,\mathscr{S}}(g) = (t_{n,\mathscr{L}_E})^{\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})}.$$

Demonstração. A condição $(\mathrm{Fr}_{q^n})^*\mathscr{S} \simeq \mathscr{S}$ resulta de $(\mathrm{Fr}_{q^n})^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}$ e do facto de, tanto F, como pr_2, comutarem com o morfismo de Frobenius Fr_q.

Para qualquer $g \in G(\mathbb{F}_{q^n})$, temos (usando o Teorema 5.2.2)

$$\begin{aligned} t_{n,\mathscr{S}}(g) &= \sum_{(kE,h)\in F^{-1}(g)} t_{n,(\mathrm{pr}_2)^*\mathscr{L}_E}(kE,h) \\ &= \sum_{(kE,h)\in F^{-1}(g)} (t_{n,\mathscr{L}_E} \circ \mathrm{pr}_2)(kE,h) \\ &= \sum_{(kE,h)\in F^{-1}(g)} t_{n,\mathscr{L}_E}(h) \\ &= (t_{n,\mathscr{L}_E})^{\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})} \end{aligned}$$

Onde a ultima igualdade vem do lemma anterior. E com isto provamos a indução. □

Na notação da proposição anterior, ao feixe $\mathscr{S} = F_!(\mathrm{pr}_2)^*\mathscr{L}_E$ chamamos o *feixe induzido* por $\mathscr{L}_E$ e denotamo-lo por

$$\mathscr{S} = \mathrm{Ind}_E^{\bar{\mathcal{G}}}(\mathscr{L}_E).$$

Definição. Sejam $\bar{\mathcal{G}}$ e $\bar{\mathcal{A}}$ como antes. Se $\mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$ for a colecção dos feixes de caracteres para $\bar{\mathcal{A}}$, definimos

$$\mathrm{SCS}(\bar{\mathcal{G}}) = \{\mathrm{Ind}_{E_{\mathscr{L}}}^{\bar{\mathcal{G}}}((i_{E_{\mathscr{L}}})^*\mathscr{L}_{E_{\mathscr{L}}}) \mid \mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})\}.$$

Os elementos de $\mathrm{SCS}(\bar{\mathcal{G}})$ são feixes em $\bar{\mathcal{G}}$, aos quais chamamos os *feixes de supercaracteres* para $\bar{\mathcal{G}}$. Denotaremos por $\mathscr{S}_{\mathscr{L}}$ o feixe de supercharacteres de $\bar{\mathcal{G}}$ que está associado a $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$.

Temos o seguinte:

Teorema 5.3.3. *Sejam $\bar{\mathcal{G}}$ e $\bar{\mathcal{A}}$ como antes. Seja $\mathscr{S} \in \mathrm{SCS}(\bar{\mathcal{G}})$ um feixe de supercaracteres para $\bar{\mathcal{G}}$ tal que $(\mathrm{Fr}_{q^n})^*\mathscr{S} \simeq \mathscr{S}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Então,*

(a) A função-traço $t_{n,\mathscr{S}}\colon \bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n}) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ é um supercaracter de $\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})$. Além disso, se $\mathscr{S} = \mathscr{S}_{\mathscr{L}}$ para $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$, então $t_{n,\mathscr{S}}$ é o supercaracter de $\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})$ que está associado ao caracter linear $t_{n,\mathscr{L}}$ de $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_{q^n})$.

(b) Para qualquer supercaracter χ de $\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})$, existe um feixe de supercaracteres $\mathscr{S} \in \mathrm{SCS}(\bar{\mathcal{G}})$ tal que $(\mathrm{Fr}_{q^n})^*\mathscr{S} \simeq \mathscr{S}$ e $t_{n,\mathscr{S}} = \chi$.

Demonstração. Pela proposição anterior, se $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$ for tal que $\mathscr{S} = \mathscr{S}_{\mathscr{L}}$, temos $t_{n,\mathscr{S}} = (t_{n,\mathscr{L}_E})^{\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})}$ onde $E = E_{\mathscr{L}}$. A alínea (a) segue-se porque $E(\mathbb{F}_{q^n})$ é o estabilizador em $\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})$ do caracter linear $t_{n,\mathscr{L}_E}$ de $E(\mathbb{F}_{q^n})$ (usando o lema 5.2.3 e a proposição 5.2.6).

Para (b), seja χ um supercaracter de $\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})$ e suponhamos que χ está associado a um caracter linear ϑ de $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_{q^n})$. Então, existe $\mathscr{L} \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$ tal que $(\mathrm{Fr}_{q^n})^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}$ e $\vartheta = t_{n,\mathscr{L}}$. Pela Proposição 5.2.6, sabemos que $t_{n,\mathscr{S}_{\mathscr{L}}} = (t_{n,E_{\mathscr{L}}})^{\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})}$, de onde resulta que $\chi = t_{n,\mathscr{S}_{\mathscr{L}}}$ (pela definição de supercaracter associado a ϑ). □

A proposição que se segue corresponde à propriedade de um supercaracter depender apenas da órbita bilateral que lhe está associada. Para a enunciar, introduzimos a notação seguinte. Para qualquer $g \in \bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F})$, denotamos por $\nu_g^{\mathtt{L}}$ o morfismo que antes denotámos por ν. Assim, temos

$$\nu_g^{\mathtt{L}}(a) = ga, \quad a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}).$$

Analogamente, denotamos por $\boldsymbol{\nu}_g^{\mathtt{L}}$ o morfismo que antes denotámos por $\boldsymbol{\nu}$, ou seja, temos

$$\boldsymbol{\nu}_g^{\mathtt{L}}(a) = a + ga, \quad a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F}).$$

Por outro lado, definimos os morfismos $\nu_g^{\mathtt{R}}, \boldsymbol{\nu}_g^{\mathtt{R}}\colon \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{A}}$ por

$$\nu_g^{\mathtt{R}}(a) = ag \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\nu}_g^{\mathtt{R}}(a) = a + ag$$

para qualquer $a \in \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{F})$.

Proposição 5.3.4. *Sejam* $\mathscr{L}, \mathscr{L}' \in \mathrm{CS}(\bar{\mathcal{A}})$ *e* $\mathscr{S} = \mathscr{S}_{\mathscr{L}}$ *e* $\mathscr{S}' = \mathscr{S}_{\mathscr{L}'}$ *os feixes de supercaracteres para* $\bar{\mathcal{G}}$ *que lhes estão associados. Suponhamos que* $(\mathrm{Fr}_{q^n})^* \mathscr{L} \simeq \mathscr{L}$ *e* $(\mathrm{Fr}_{q^n})^* \mathscr{L}' \simeq \mathscr{L}'$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$*. Então,* $t_{n,\mathscr{S}} = t_{n,\mathscr{S}'}$ *se e só se existem* $g, h \in \bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})$ *tais que*

$$\mathscr{L}' \simeq (\boldsymbol{\nu}_g^{\mathtt{R}})^* (\boldsymbol{\nu}_h^{\mathtt{L}})^* \mathscr{L} \simeq (\boldsymbol{\nu}_h^{\mathtt{L}})^* (\boldsymbol{\nu}_g^{\mathtt{R}})^* \mathscr{L}.$$

Demonstração. Os supercaracteres $t_{n,\mathscr{S}}$ e $t_{n,\mathscr{L}'}$ de $\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})$ estão associados aos caracteres lineares $t_{n,\mathscr{L}}$ e $t_{n,\mathscr{L}'}$ de $\bar{\mathcal{A}}((\mathbb{F}_{q^n})$. Assim, $t_{n,\mathscr{S}} = t_{n,\mathscr{S}'}$ se e só se $t_{n,\mathscr{L}}$ e $t_{n,\mathscr{L}'}$ estão na mesma órbita bilateral de $\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})$ em $\widehat{A}(\mathbb{F}_{q^n})$, ou seja, se e só se existem $g, h \in \bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})$ tais que

$$t_{n,\mathscr{L}'} = (g, h) \cdot t_{n,\mathscr{L}} = t_{n,\mathscr{L}} \circ \boldsymbol{\nu}_g^{\mathtt{R}} \circ \boldsymbol{\nu}_h^{\mathtt{L}} = t_{n,(\boldsymbol{\nu}_g^{\mathtt{R}})^*(\boldsymbol{\nu}_h^{\mathtt{L}})^*\mathscr{L}}.$$

Como, $\mathscr{L}'$ e $(\boldsymbol{\nu}_g^{\mathtt{R}})^*(\boldsymbol{\nu}_h^{\mathtt{L}})^*\mathscr{L}$ são feixes de caracteres sobre $\bar{\mathcal{A}}$, o teorema 4.4.1 garante que

$$t_{n,\mathscr{L}'} = t_{n,(\boldsymbol{\nu}_g^{\mathtt{R}})^*(\boldsymbol{\nu}_h^{\mathtt{L}})^*\mathscr{L}} \iff \mathscr{L}' \simeq (\boldsymbol{\nu}_g^{\mathtt{R}})^*(\boldsymbol{\nu}_h^{\mathtt{L}})^*\mathscr{L}$$

e isto termina a demonstração. □

Uma questão que fica em aberto (entre muitas outras) é a de saber se, dado um feixe $\mathscr{F}$ em $\bar{\mathcal{G}}$ tal que $(\mathrm{Fr}_{q^n})^*\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}$ e tal que a função-traço $t_{n,\mathscr{F}}$ é um supercaracter de $\bar{\mathcal{G}}(\mathbb{F}_{q^n})$, se tem $\mathscr{F} \simeq \mathscr{S}$ para algum $\mathscr{S} \in \mathrm{SCS}(\bar{\mathcal{G}})$. Outra questão é a de construir, caso seja possível, um feixe sobre $\bar{\mathcal{G}}$ (ou, possivelmente, sobre uma dada órbita bilateral no grupo dual $\widehat{A}(\mathbb{F})$) cujo traço dá, de uma forma directa, o valor de cada supercaracter por meio da fórmula que obtivémos na secção 1.7.

Bibliografia